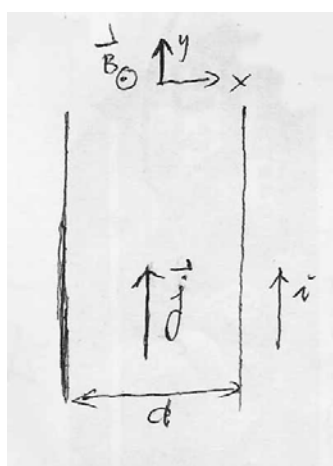


第 21 讲

(三) 霍耳效应 (电场+磁场)

Hall 效应是最重要的物理现象之一，是探测物质性质的一个重要的实验手段。在物理学的发展历程中，霍尔效应起了非常大的推动作用。人们相应发现了经典霍耳效应，半经典霍耳效应（量子效应被有限度考虑），反常霍耳效应（Luttinger 等，人们认识到自旋的重要性），量子霍耳效应（Von klitzing, 强磁场，单体量子效应完全显现），分数量子霍耳效应（崔奇, Stomer, Laughlin, Halperin, Kiverson, DH.lee, 多体强关联量子体系），自旋霍耳效应（Hirsch, 张首晟, 张富春, 沈顺清, 等）。其中，Von klitzing, 崔奇, Stomer, Laughlin, 分别获 Nobel 奖。

下面我们讨论最基本的 Hall 效应。

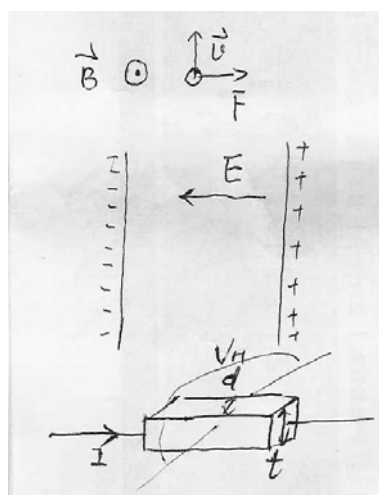


设有一宽为 d 的条形导体，如右图所示。沿 z 轴加均匀磁场， $\vec{B} = B\hat{z}$ ，然后沿 y 轴方向加电压（将其沿 y 轴的两端接在电源的两极），使得电流 $\vec{j} = j\hat{y}$ 沿 y 轴流动。注意到，电流的本质是运动电荷（在相反电荷的背景下），即

$$\vec{j} = qn\vec{v}$$

而运动电荷受到洛仑兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

① 假设载流子为正： $q > 0$ ，则运动速度 $\vec{v} // \hat{y}$ ，因



此洛仑兹力的方向 $\vec{F} // x$ ，作为载流子的运动正电荷向右边偏转。相应负电留在左边，如右图所示，因此两边的电荷在导体内部建立一静电场 \vec{E} 。当此横向电场对电荷的作用与磁场的洛仑兹力平衡时，

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \text{时}$$

上述电荷积累过程停止，体系达到稳定。稳定时：

$$E_H = vB = \frac{j}{qn} B \quad \text{为霍耳电场}$$

霍尔电压

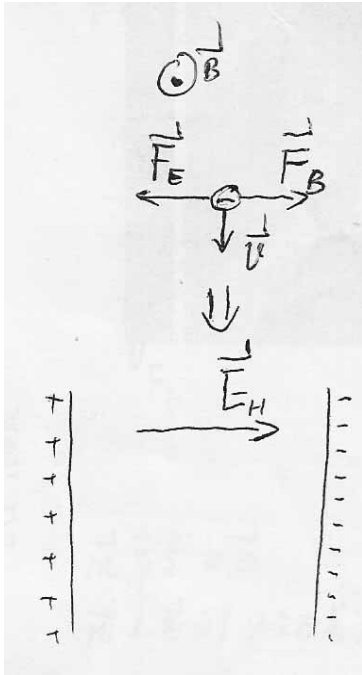
$$V_H = E_H d = \frac{j d}{qn} B$$

定义 t 为导体的厚度 则 $j = \frac{i}{t d}$

$$V_H = \frac{i B}{t q n} \Rightarrow R_H = \frac{B}{q n t}, \quad n = \frac{i B}{q t V_H}$$

R_H 为霍尔电阻

测得 V_H 可以由 B 、 t 、 i 等计算载流子浓度!



② 假设载流子为负电: $q < 0$ 则同样条件下, $\vec{v} // -y$,

因此可以计算出来洛伦兹力为 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = |q v B| \hat{x}$,

因此对负电荷的作用力沿 $+\hat{x}$ 方向。这种情况下, 负电荷将积累在右边而留下正电荷在左边, 由此产生的霍尔电场反向! 如右图所示。

因此时载流子为负电, 因此磁场力与电场力的方向为:

$$\vec{F} = -|q| \vec{v} \times \vec{B} \quad \hat{x}$$

$$\vec{F} = -|q| \vec{E} \quad -\hat{x}$$

$$\vec{F}_{\text{总}} = \vec{F}_B + \vec{F}_E = 0 \quad \text{仍可平衡}$$

此时正电仅仅是背景, 不可以自由移动, 同样条件下测 V_H 的正负即可以探测载流子的正负。

经典 Hall 效应是重要的探测载流子性质 (正负号, 浓度) 的实验手段

思考: (1) 为什么电荷应当积累在边界, 体内会不会有电荷积累?

(2) 为什么不考虑背景电荷的受力及运动?

(四) 载流线圈

已知载流线圈的磁场 \Leftrightarrow 偶极子的电场

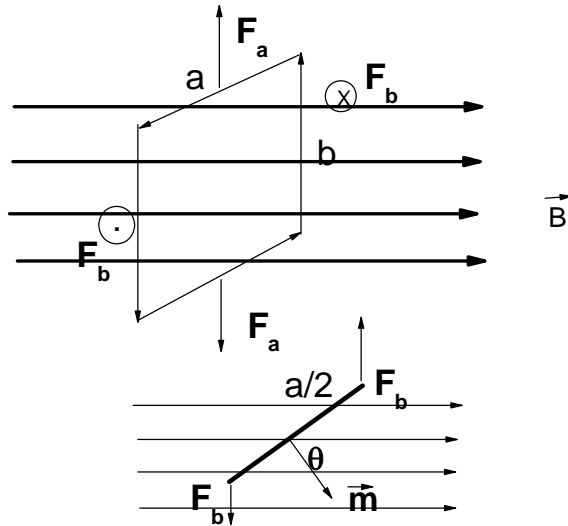
\vec{m} 在 \vec{B} 中的形为是否等同于 \vec{p} 在 \vec{E} 中?

考虑最简单的情形, 均匀磁场 \vec{B} , 矩形线圈, 看看其受力情况。

由安培定律: $d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$, 则总受力为所有载流导线受力的总和:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

无论如何放置， \vec{m} 在均匀磁场中受力总和为 0（相对的两个电流导线受力相反），但力矩不为 0！



$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\frac{a}{2} F_b \sin \theta \times 2\right) \cdot \hat{z} = (a \cdot ib \cdot B \cdot \sin \theta) \cdot \hat{z} = iA \cdot B \cdot \sin \theta \\ &= mB \cdot \sin \theta \cdot \hat{z} = \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned}$$

事实上， $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ 是一个一般结论，不依赖于线圈的形状。

\vec{m} 希望 $\parallel \vec{B}$

$\vec{m} \perp \vec{B}$ 时 力矩最大 回想 $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ ，的确， $\vec{m} \leftrightarrow \vec{P}$

第 34 章：电磁感应

(一) 问题的提出及基本实验现象

磁场的起源原本是神秘的，Orster 将磁场的起源归结于电流。而电流是由电场驱动的，电场 \Rightarrow 电流 \Rightarrow 磁场（将磁场与电场联系起来）

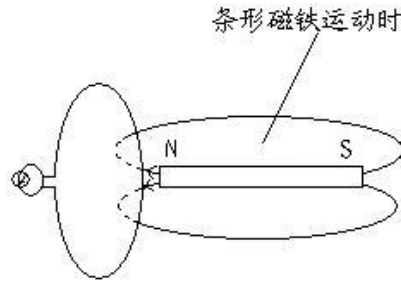
有无逆现象？

磁场 \Rightarrow ? 电场 (电流)

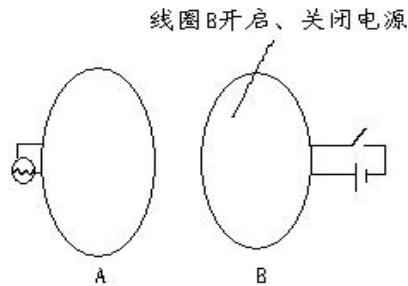
法拉第 (1831) 做了大量的实验，总结出稳恒的 \vec{B} 不可以激发电场，变化的 \vec{B} 可

能。
两个典型实验：

a)



b)



共性：

- ① \vec{B} 在变化（运动或开、关电源）
- ② \vec{B} 通过线圈的面积（如不然，几乎没效应）
- ③ 良导体 i 大，差导体 i 小。产生的电流 $i \propto$ 线圈材料的导电率 R^{-1}

\Rightarrow 本质并非产生电流，而是电动势 $\varepsilon = iR$ ，问题是此电动势由什么因素决定：

$$\varepsilon \propto \vec{B}, \vec{S}, \frac{d}{dt} ?$$

(二) 法拉第电磁感应定律

磁通的定义: $\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

对比电通量 $\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

ϕ_m 的单位是Weber, 1Weber=1T · 1m²

Faraday's induction law

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right|$$

回路中电感应电动势的大小等于通过次回路的磁通量的变化率。

注意：电动势和磁通变化率有关， Φ 本身大小并无意义。

检验单位 $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{T \cdot m^2}{s} = \frac{T \cdot m}{s} \cdot m$

注意到 $F = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ $\frac{T \cdot m}{s} \cdot \text{电场} \cdot \frac{V}{m}$

所以 $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{v}{m} \cdot m = V$, 正确!

对于 N 匝线圈

$$|\varepsilon| = N \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right|$$

其中 $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 为单匝线圈的磁通。



(三) 楞次定律

电动势的方向如何确定?

Lenz 于 1834 年给出感应电流的方向: “感应电流产生的磁通量用来抵消原来磁通量的变化”, $i_{in} \rightarrow \vec{B}_{in} \rightarrow \phi_{in}$ 。

例子:

a) 原磁通量 $\phi_0 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BS$

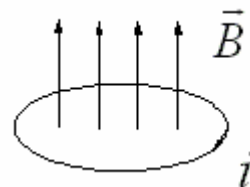
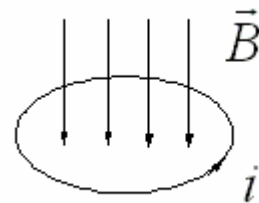
① 假设 B 变大, 则 ϕ_0 变小, i 如图 (逆时针)

② $B \downarrow$ $\phi_0 \uparrow$ i 反向

b) 原磁通量 $\phi_0 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BS$

③ $B \uparrow$ $\phi_0 \uparrow$ i 如图 (顺时针)

④ $B \downarrow$ $\phi_0 \downarrow$ i 反向



楞次定律可由能量守恒来理解:

a) 一个磁铁靠近时, 引发感应电流等效于小磁铁, 此等效磁针对原磁铁有斥力。

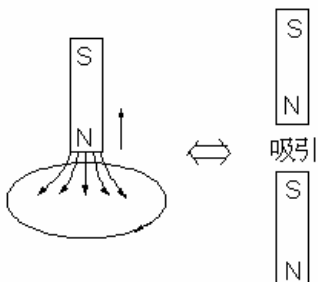
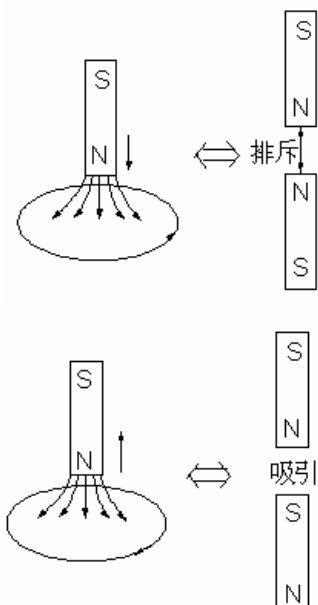
负反馈是自然的选择, 若不然给一个小的扰动, 正反馈使相互吸引电流及相互运动将变大, 能量无处供给! 后面动生电动势的讨论可以看到, Lenz 定律是有其深层次的物理原因, 不完全是实验定律

b) 远离时, 引发 $i \leftrightarrow$ 小磁针

则此等效磁针对原磁铁有吸引力

总之, 感应电流的产生是抵抗变化的!

Lenz 定律的核心一系统对外界变化的响应是负反馈
现在给出数学形式 规定:



- ① 回路的右手螺旋为电动势的正向
- ② 回路所包围的面积的正方向为回路的右手螺旋 ($d\vec{S}$)

综合 Lenz 定律和 Faraday 定律可得

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}}$$

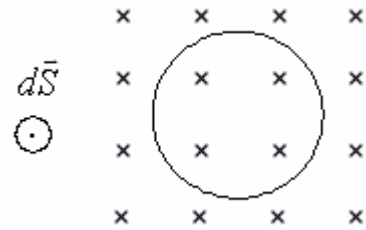
此即完整的电磁感应定律。

简单应用原则: 将电磁感应 \leftrightarrow 回路中串联一个电动势

举例说明

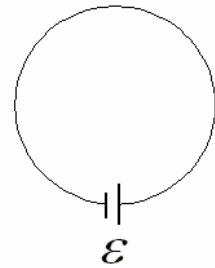
$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BS$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \dot{B}S$$



$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ 电动势沿逆时针方向。反之，则反向。

有此数学描述: a) 不必再判断感应电流所产生的磁场的方向; b) 有时电流的方向不与 ε 相同, 比如原来电路中已有一个电动势。



注意到 $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$, 其变化有两类:

$d\vec{S}$ 变 (动生); \vec{B} 变 (感生), 下面分两种情形讨论。

(四) 动生电动势

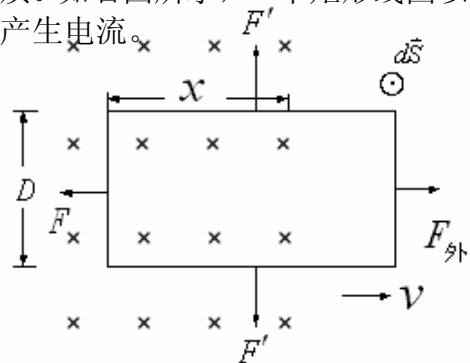
(1) 直流电动势

举一个简单的例子来看动生电动势的实质。如右图所示, 一个矩形线圈以恒定速度离开一块均匀磁场区域。线圈内产生电流。

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BDx$$

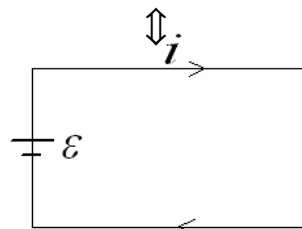
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = BD \frac{dx}{dt} = -BDv$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \quad R \text{ 为回路总电阻}$$



接下来分析能量转移, 先分析受力

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$



$$\vec{F}_{\text{总}} = \vec{F} + \vec{F}' - \vec{F}' = \vec{F} = iDB(-\vec{e}_x)$$

若回路匀速运动 $|\vec{F}_{\text{外}}| = |\vec{F}| = iDB$

感应电流的产生是用来阻碍外力的 (Lenz 定律的核心)

外力做功: $P_{\text{外}} = |\vec{F}_{\text{外}}| \cdot \left| \frac{dx}{dt} \right| = F_{\text{外}} \cdot v = iDBv = i\varepsilon = i^2R = \frac{dQ}{dt}$

稳恒条件下 (v 不变, i 不变), 外力做功 \Leftrightarrow 热 (输出功率)

注意: 若无 Lenz 定律的 “-” 号, 能量守恒吗?

两个效应:

a) 涡旋电流 (eddy current)

当大块金属 (非线圈) 通过 \vec{B} 时,

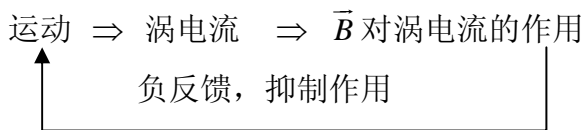
金属内部出现涡旋电流, 如图所示 (右图中电流蜗旋中心点有误)。热能消耗巨大。

解决方法: (I) $Q = \frac{\varepsilon}{R^2}$, R 大则 Q 小;

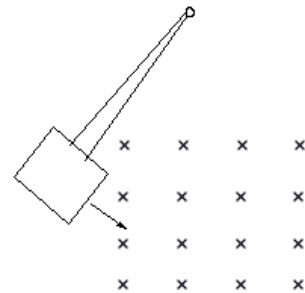
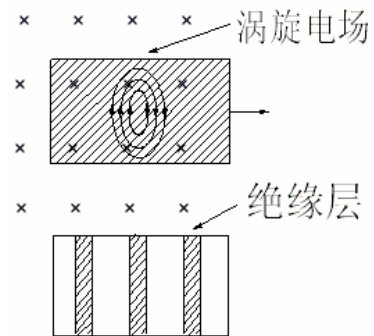
(II) 加绝缘层阻碍电流

b) 电流阻尼

好处是可以用来**制动**, 磁刹车。



能量角度: 动能 \Rightarrow 磁场中涡电流耗散 \Rightarrow 停止
根本的原因均是 Lenz 定律



习题: P743, Questions, 26

P747, Problems, 14, 16, 18

P791, Questions, 13

P794, Exercises, 10

P797, Problems, 2, 4