第十四讲

复习：

* 电容的定义 $C=\dfrac{Q}{\Delta V}$ （Q---贮存的电量，V---两导体的电压）

* 几种电容

$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\bar{A}}{d}$ （A---板的有效面积，d---提升电压，降低贮电能力，

ε_r ---提升电容（极化电荷））

* 电容的串并联

串： $\tilde{C}^{-1}=\sum_i C_i^{-1}$ ， 并： $\tilde{C}=\sum_i C_i$

（四）静电场的能量：

电容的另一功效是贮存静电能，事实上这是电容更本质的作用。让我们计算电容器的静电能。一个电荷在电场中的电势能为 $U=qV$ ，其中 V 为电荷所在地的电势。 对一个电容器来讲，一个导体上电荷为 Q ，其为等势体，电势为 V_1 ，另一个导体上带有-Q 的电荷，其电势为 V_2 。对这个两导体组成的体系来说，是否我们可以如下计算其电势能呢？

$$U=QV_1+(-Q)V_2=Q(V_1-V_2)=Q\Delta V=\frac{Q^2}{C} \qquad (1)$$

事实上，此结果错了！为什么？可以由如下两个方面来理解这个问题。

（a） 电荷体系的建立过程

假设最初电荷分布在无限远处，此时为能量的 0 点，让我们考虑在电容体系从初态到终态的建立过程中，外界需要对体系付出多少功。假设某一时刻体系已充了 q 电荷，则此时两极板之间的电势差为

$$\Delta V_q=V_1(q)-V_2(q)=\frac{q}{C}.$$

此时从 ∞ 处搬来 $\pm\Delta q$ ，分别充在正负极板上，

此过程增加的电能（外界对电荷作的功）为

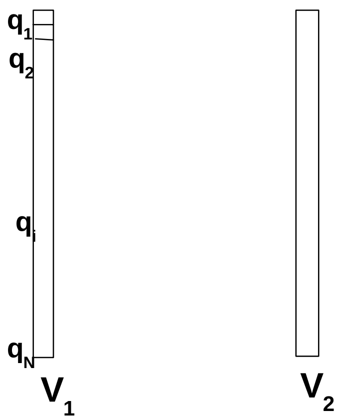
$$\Delta U = V_1(q)\cdot\Delta q - V_2(q)\cdot\Delta q = \frac{q}{C}\Delta q$$

体系从没有电荷 $(q=0) \to$ 最终达到 Q 的过程中增加的总能是这些分过程的贡献的叠加，则总能为

$$\boxed{U = \sum_i \Delta U(q) = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2}$$

----此结论对任意形状的电容器成立！

（**b**） <u>直接从能量角度看</u>



将导体分成一个个的小块，每一小块上带的电荷都可以视为一个点电荷 $\{q_1.q_2,...,q_N\}$。体系的总能是相互作用能，每一对点电荷之间的相互作用能只能计算一次，不可以重复。因而：

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot \sum_{j\neq i}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{|\vec{r}_i - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot V(\vec{r}_i)$$

其中，

$$V(\vec{r}_i) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{|\vec{r}_i - \vec{r}\,'|}$$

为电容上的电荷分布在 $\vec{r}_i$ 点的产生的电势。尽管我们不知道电荷分布，根据导体静电平衡的 3 个特征，导体上的电荷分布一定要调整到使得整个导体成为一个等势体。故

$$V(\vec{r}_i)=\begin{cases}V_1, & \text{conductor 1}\\ V_2 & \text{conductor 2}\end{cases}$$

因此， 总能为

$$U=\frac{1}{2}[QV_1-QV_2]=\frac{1}{2}Q\Delta V=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}C\Delta V^2 \quad （2）$$

表达式（1）的错误在于计算q_1时已计算了q_1与其它$N-1$电荷的相互作用，计算q_2时又将q_1与q_2之间的相互作用能计算进去。总的来说多计算了一次相互作用能。亦可从下面两个角度深入理解：

① 从做功角度来看：

每个电荷从∞处搬来时，被做功是不一样的（受力不一样）

一开始容易，最后最难，因此平均下来受到一半的场的作用

② 从相互自作用能来看：

$\frac{1}{2}$的来源是去除计算两次 double counting

<u>电容能的另一个表达式</u>

电容内存储的能量看上去是以电荷作为载体存在的。这个观点在静电学范畴内是对的，至少我们看不出它的错。事实上，电容能的表达式还有另外一种形式，可能有着更深远的物理意义。以平板电容器为例，对平板电容器来说，$E=\frac{V}{d}$是均匀场。考虑电容器中存储的电能：

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}\cdot\frac{V^2}{d}\cdot d=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\cdot\Omega$$

其中$\Omega=A\cdot d$为电容器的体积。因此可以定义一个新的物理量，

$$u=\frac{U}{\Omega}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \quad （3）$$

物理意义为能量密度----单位体积内贮存的电能

<u>讨论</u>:

① 当给定电压时 $E=\frac{\Delta V}{d}$ 一定

有介质时比无介质可以贮存更多的电场能（这也是我们为什么要研究电介质的原因）

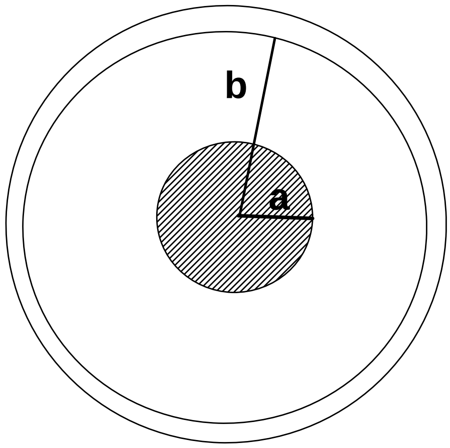
② 有介质时使电荷贮量增加（由极化产生束缚电荷的原因）。但为什么增加贮存的电能？看上去一个简单的解释是多出来的能量以极化能的形式贮存

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0(1+\chi)E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}=u_e+u_p$$

乍一看似乎合理，但深入思考问题来了：为什么是极化能是$+\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}$？一个偶极子在电场中的相互作用能不是$-\vec{p}\cdot\vec{E}$吗？考虑所有偶极子的影响，似乎应当是$-\vec{P}\cdot\vec{E}$？

③　平板推出 $u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$ 是针对均匀场的情形成立的。非均匀场如何？不妨考虑球状电容器（其内场为非均匀场）

假设能量密度的表达式 $u(r)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2(r)$ 仍正确，则我们先计算球形电容器中的电场，再求出其能量密度。



$$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

则能量密度为 $u(r)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{Q^2}{16\pi^2(\varepsilon_0\varepsilon_r)^2 r^4}$

积分可得总能

$$U=\int_a^b\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}\cdot 4\pi r^2 dr$$

$$=\int_a^b\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr=-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\bigg|_a^b$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{b-a}{ab}$$

另一方面，我们由（2）知道电容器中的能量为

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ba}{b-a}}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{b-a}{ab}$$

两者完全一样！其实电场密度$u(\vec{r})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r|\vec{E}(\vec{r})|^2$是一个普适的关系式！对任意形式的电场分布均成立。总能可因此定义为$U=\int u(\vec{r})d\vec{r}$

④ 两个表达式的对比

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2 \quad \Leftrightarrow \quad u(\vec{r})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
似乎能量停留在电荷处 没有电荷的地方没有能量	能量贮存在电场中 与此处有无电荷无关

静态来看，这两种看法没有办法判断真伪。但当电场随时间发生变化的时候，第一种表达式就不再正确，但第二个表达式依然正确。事实上，表达式（3）更本质，说明了场是一种物质。

⑤ 我们发现电容总是与线度成正比（$C\sim L$），事实上，这里有着深远的物理意义。考虑电容能 $U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$，与两个电荷之间的相互作用能$U_{ij}=\frac{1}{2}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$类比，发现，C 无非就是两个电荷之间的“有效距离”而已。

习题：P693，Questions， 20， 22
P698， Problems， 14，21，22，23