第十讲

真空中的静电场的所有物理：把握一个原则，即电场由电荷产生

（1）$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$ —— 静电场是有源场

（2）$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ —— 静电场是无旋场

（3）$\vec{F}=q\vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}=-\nabla V$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$U=qV=-q\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \Leftrightarrow \quad V=-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（4）导体的静电平衡条件：导体是个等势体

第 29 章：**物质中的电行为**

物质分为：（超导体） 导体 （半导体） 绝缘体

导体 $\downarrow$ 自由电荷

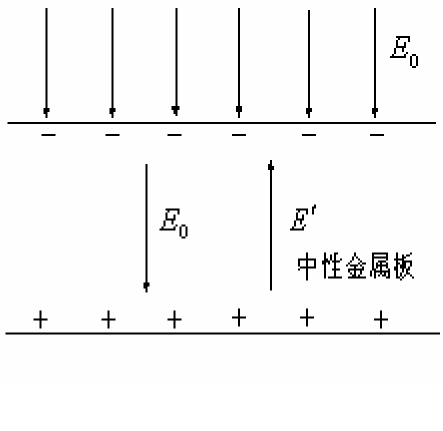
绝缘体 $\downarrow$ 束缚电荷

一. 导体

<u>静电平衡</u>：三个条件（不再赘述）

<u>动态平衡:</u>

(1) 电流的定义



看一个电流产生的例子，将一电中性的金属平板放在外电场$\vec{E}_0$中，电荷在外电场的作用下移动，会产生附加场$\vec{E}'$，

$t=0$ 时， $\vec{E}'=0$ ， 故电荷可以流动，

$t\to\infty$ 时， $\vec{E}'=-\vec{E}_0$， $\vec{E}_{内}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$

此时处于平衡情况，电荷运动也就停止下来。

假设可以把电荷积累移走，使附加电场$\vec{E}'$不存在，则电荷可以一直流动下去。

一个办法当然用导线将两个界面接起来，利用某种力将积累的正电荷从下表面“搬”到上表面，这样就可以使得电流一直持续下去了。以后我们会明白，这种外力一定要是某种非静电力。

而电流是指：$\boxed{\text{电荷的流动}}$

因此我们可以给出电流的定义：

$\boxed{\text{给定一个截面 } A\text{，单位时间通过此截面的净电荷}}$

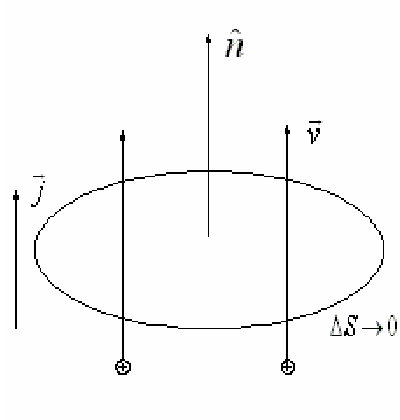
$$\boxed{i = \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

- 电流是标量，只有$+,-$，没有方向
- 电流的单位是安培 $=$ 库仑/秒

i给我们的是一个积分的效应，好像电通量，水通量一样。

回想电通量的定义$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$， 及水通量的定义$\phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$， 分别牵扯了某个场量在一个截面上的积分（电场强度$\vec{E}$ ，速度场$\vec{v}$）， 这个场给出了我们所研究的对象的更微观的信息。哪么，对于电流，是否也存在这样一个微观的场？其实，这个微观的场就是电流密度$\vec{j}(\vec{r})$，满足$i = \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 。

<u>电流密度$\vec{j}(\vec{r})$的定义</u>：



(a) **先看所有电荷均匀地垂直通过表面的情况**

由于$\vec{j} // \vec{n}$ ，那么j成为均匀标量 ，

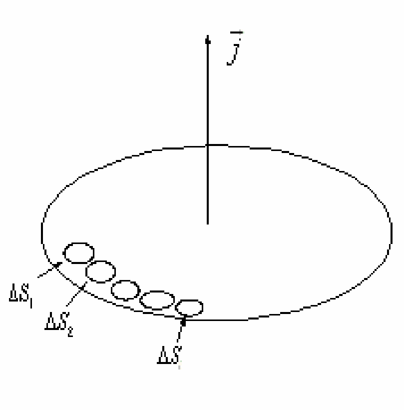
$$i = j\Delta S = \int_S j \cdot dS$$

$$j = \frac{i}{\Delta S} = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S}$$

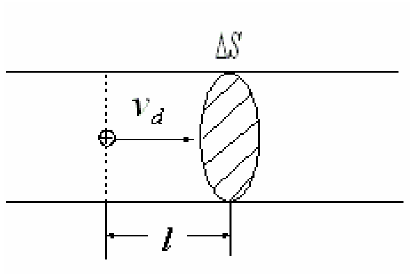
也就是单位时间通过单位面积的电量。

(b) **若电荷分布非均匀，** 则可把截面分成一个个的小块，在小块内一定均匀

$$j(r) = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S}\Big|_{\Delta S \to 0},$$



$\underline{j\text{的微观计算方法}}$：如何计算 Δq？考虑下图，可知 Δt 时间内处于高为 l 底面积为 ΔS 的柱体内的电子可以通过截面。而 $l = v_d \Delta t$， v_d 为电荷的漂移速度， 则



$\Delta q = n_e q l \cdot \Delta S = n_e q v_d \cdot \Delta t \cdot \Delta S$， 其中 n_e 为载流子密度， 故，

$$\boxed{j = \frac{n_e q v_d \Delta t \cdot \Delta S}{\Delta t \cdot \Delta S} = n_e q v_d}$$

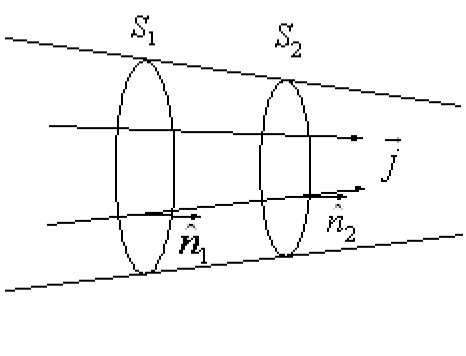
(c) 此定义可以推广到一般情况(电荷分布非均匀，速度不必垂直于截面)

此时有： $\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = n_e(\vec{r}) q \vec{v}_d(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}) \vec{v}_d(\vec{r})}$

通过 $\boxed{i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}}$ 可以计算通过任意曲面的电流（对比电通量，水通量）， 可知这样计算出来的电流的确是符合我们最初的定义：单位时间通过一个给定截面的电荷总量。

1. 电流与电流密度是两个不同的物理量：前者是宏观量，后者是微观量（更准确地讲：微分量）。前者为 0 并不必然意味着后者为 0，因为截面的方向可以与电流密度的方向垂直。
2. 这里我们都仅考虑一种载流子的情况（或正或负）。任意情况（体系中即有正电荷，亦有负电荷）显然同样适用 --- 隐含在电荷密度上。

（2）电流与电荷密度的关系



S_1 与 S_2 包围的体积 ΔV 中

Δt 时间进入 ΔV 中的电量

$$\Delta q_1 = \vec{j}(S_1)\cdot\Delta\overrightarrow{S_1}\cdot\Delta t$$

Δt 时间出去 ΔV 中的电量

$$\Delta q_2 = \vec{j}(S_2)\cdot\Delta\overrightarrow{S_2}\cdot\Delta t$$

Δt 时间 ΔV 中电量的增加 （考虑两个界面的方向）

$$\Delta q = \Delta q_1 - \Delta q_2 = \vec{j}(\overrightarrow{S_1})\cdot\Delta S_1\cdot\Delta t - \vec{j}(\overrightarrow{S_2})\cdot\Delta S_2\cdot\Delta t$$

$$= -\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}\cdot\Delta t$$

得流守恒定理： $$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = -\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int \dot{\rho}_{\mathrm{e}}(\vec{r})d\vec{r} = -\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}}$$

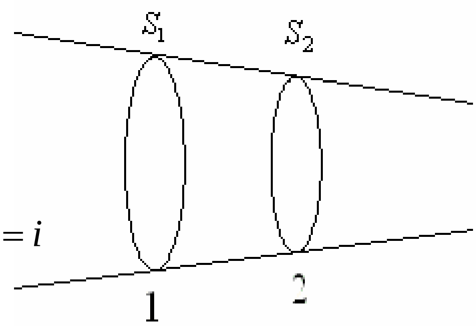
<u>动态平衡条件</u> ： $\dot{\rho}_e(\vec{r}) = 0$ ，即任意位置的电荷分布不随时间变化

$$\Downarrow$$

$$\oint \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\text{稳恒时电流分布是个无源场}}$$

$$\Downarrow$$

应用到导线内部



$$\int \overrightarrow{j_1}\cdot d\overrightarrow{S_1} - \int \overrightarrow{j_2}\cdot d\overrightarrow{S_2} = 0$$

$$\int \overrightarrow{j_1}\cdot d\overrightarrow{S_1} = \int \overrightarrow{j_2}\cdot d\overrightarrow{S_2} = \cdots = \int \overrightarrow{j_m}\cdot d\overrightarrow{S_m} = i$$

在稳恒条件时，导线内的电流处处相同，电流密度

$$j(r) = \frac{i}{\Delta S}$$

可知电流密度不相同，截面越小，电（水）流越急

<u>（3）欧姆介质</u>

注意到 $\vec{j} = nq\overrightarrow{v_d}$ ，要计算 $\vec{j}$ 与什么有关，从左式中可知要考虑速度与什么有关？由牛顿第二定律 $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}$，我们来做一个简单的猜测，就是 $\vec{j} \propto \vec{E}$ 。

欧姆介质的定义：$\boxed{\vec{j}=\sigma\vec{E}}$，其中$\sigma$是电导率与电场、电流无关， 仅与材料性质有关。

所有满足$\vec{j}=\sigma\vec{E}$ 的介质叫欧姆介质或线性介质，半导体，超导体即非欧姆介质。

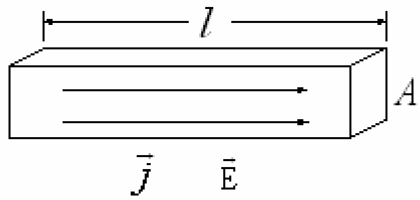
σ的单位是 西门子/米，考虑到$\sigma \sim j/E=\dfrac{安/米^2}{伏/米}=\dfrac{安/伏}{米}$，可知：$1西=1安/伏$。

由电导率的定义可以定义一个新的物理量：电阻率

$$\boxed{\vec{E}=\rho\vec{j}},\qquad 其中\ \rho=1/\sigma\ 是电阻率，单位是欧姆\cdot米$$

$\vec{E},\vec{j},\sigma,\rho$ 都是微分量，不易观测，

$$\vec{E}(\vec{r})=\rho\vec{j}(\vec{r})$$
$$\vec{j}(\vec{r})=\sigma\vec{E}(\vec{r})$$



它们相应的宏观量较容易观测，比如对一个长度为 l, 截面积为 A 的欧姆导体，由微分量之间的关系可以推出：

$$E=\rho j \qquad \Rightarrow \qquad V=\rho\cdot l\frac{I}{A}=\rho\frac{l}{A}\cdot I=RI$$

$$\Downarrow$$

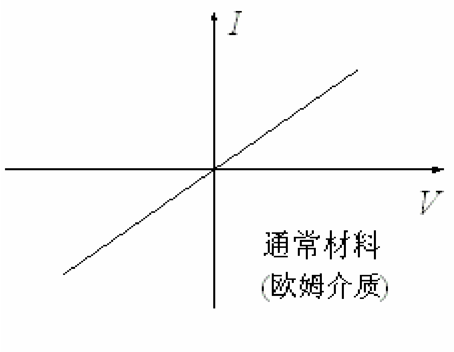
$$\boxed{R=\rho\frac{l}{A}}$$

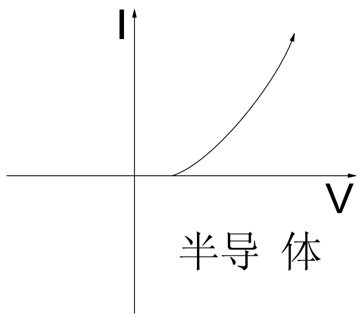
E,j 是微观（分）量 ， ρ 是材料的本征性质，与形状，大小无关

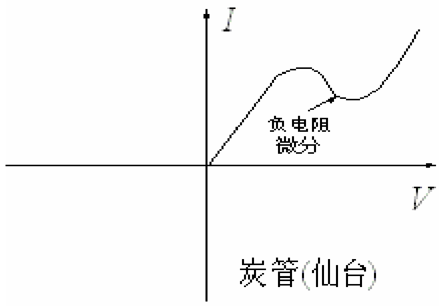
V,I 是宏观量 ， R 是具体到一定形状，大小的一个物体上

$V=IR$ 的适用范围可能更广 ，毕竟 $I\sim V$ 曲线总可以观测。

如何翻译到σ,ρ则大费思量







（4）欧姆定律的微观机制

a) 经典理论

在经典理论中，导体中的电子可以看成自由电子。在外场下，电子受力：$\vec{F}=q\vec{E}$，由牛顿第二定律：$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}$，因此在电场下，电子一直做加速运动。自由电子气的速度可以写成两个部分：$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_d$，$\vec{v}_r$是无规热运动，$\vec{v}_d$是定向漂移速度。

由于电子无规运动向各个方向的几率都一样的，所以$\langle v\rangle=\langle v_d\rangle$。平均意义下，我们只需考虑电子的漂移运动。

问题是：电荷在外场的作用下一直在做加速运动，得不到一个稳恒的电流。

必须有其他的机制来平衡外场力的作用，才可能建立稳恒的电流！

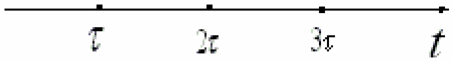
电子之间的碰撞可以改变一个电子的速度，但这属于内力，不能改变整个自由电子气的平均速度！这个机制一定是其他粒子（杂质，声子等）对电荷（子）的散射！

考虑了其他粒子的散射贡献之后，电子的运动方程可以改写成：

$$\frac{d\vec{v}_d}{dt}=\frac{q\vec{E}}{m}+\frac{\vec{F}_{sca}}{m}\quad ,$$

右边的第二项是散射对电子的作用力，显然非常复杂。为了定量考虑这一贡献，让我们对散射作如下近似

1） 定义τ为电子平均两次被异类粒子散射的间隔时间，通常称作迟豫时间。



2） 假设电子被散射后将原有的定向运动的漂移速度完全忘记

（Dephasing），变成只有完全无规热运动。

在这两个近似下，根据牛顿第二定律， 散射对电子有效作用力为

$$\vec{F}_{sca}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{\Delta\vec{v}_d}{\Delta t}$$

其中$\Delta\vec{v}_d$为Δt时间内粒子的因散射而改变的漂移速度。根据近似 1），Δt时间内被散射的机率为$\frac{\Delta t}{\tau}$；根据近似 2），每次散射后速度改变为$\left(0-\vec{v}_d\right)$。 因此，

$$\Delta\vec{v}_d=\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)\left(0-\vec{v}_d\right)=-\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)\vec{v}_d$$

故，散射贡献的等效力为

$$\vec{F}_{sca}=m\frac{\Delta\vec{v}_d}{\Delta t}=-m\frac{\vec{v}_d}{\tau}$$

带入可得，

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_d}{dt}=\frac{q\vec{E}}{m}-\frac{\vec{v}_d}{\tau}}$$ --- 迟豫时间近似下的运动方程

电场下的稳恒电流？ 要求$\vec{v}_d$不随时间变化，则有

$$\boxed{\vec{v}_d=\frac{\vec{E}q}{m}\tau\sim\vec{E}}$$ --- 的确证实了我们最初的猜测！

$$\Rightarrow j=nqv_d=\frac{nq^2\tau}{m}E\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sigma=\frac{nq^2}{m}\tau}$$

物理讨论：

1）与不同物理量之间的关系：电子密度大，则电流大；电荷质量大，则惯性大，不易被加速，同样驱动力下电流因此小；迟豫时间长，意味着散射的几率小（杂质密度低，样品纯净），因而导体的导电性能好。

2) 散射的作用可以类比于摩擦力：$\vec{F}_{sca}=-m\frac{\vec{v}_d}{\tau}=-\alpha\vec{v}_d$，$\alpha$为摩擦系数或粘滞系数。外场与摩擦力平衡时决定了终态电流 --- 就像在沙子上拉车，或是将一个小球从液体中释放，终态速度正比于电场、牵引力、或是重力。

3）更深层次的物理在能量交换上。考虑电场作用下的电荷体系，电场一直对电荷作功，然而若我们要求电流稳恒，则意味着体系的机械能没有变化。能量到哪里去了？--- 思考。

b) 经典物理图象的困难

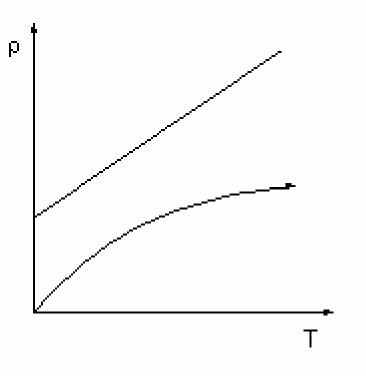
经典图像尽管直观易懂，但有几点与实验不符。

（1）．金属电阻的温度依赖关系

在低温下，可以假设散射主要由杂质贡献。设杂质之间的平均间隔为λ：又**称作平均自由程**

其物理意义就是电子平均运动多少距离碰到一次散射。显然这个量基本上不随温度 T 变化。

经典物理中，可以由此计算出迟豫时间对 T 的依赖关系



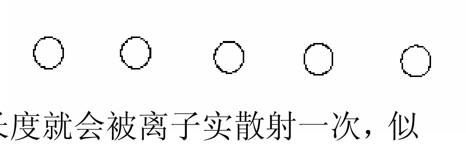
$\tau \sim T^{-1/2}$ （见习题）

故： $\rho = \dfrac{m}{ne^2\tau} \sim \sqrt{T}$

然而真实的测量结果为 $\rho(\tau) \sim \rho_0 + \alpha T$

两点不符：a）即使温度为绝对零度也有电阻ρ_0！

b）对温度的依赖关系亦不相同！



（2）平均自由程λ是多少？

电子在晶格中运动，平均经过一个晶格长度就会被离子实散射一次，似乎l就是晶格周期a！至少在经典力学中这样考虑是合情合理的。然而，20 世纪初，人们发现这个图像是错误的。在理想固体（晶格完美，没有缺陷及杂质），实验发现$l \to \infty$！这是一个惊人的结果，因为电子一直在受到离子实的散射，为什么这些散射不会导致电阻呢？这是经典力学的困难。

这些问题直到量子力学建立以后才解决

c) 量子力学的图象：（更深一步了解），

在量子力学里，经典的电阻的图像基本正确，但需要做如下修正

（1）电子质量 $m \to m^*$ 有效质量

（2）$\langle \vec{v}_r \rangle = 0$ --- 热运动的平均值为 0（杂乱无章），这点一致。

量子：$\langle \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r \rangle = v_f^2 \to$ 费米速度：热运动的速率几乎与温度无关!，参与导电的电子以v_f为速率，方向杂乱无章的运动。

（3）仍有平均散射时间（迟豫时间）的概念。而且进一步，因为热运动的速率恒为v_f，迟豫时间与平均自由程的关系为 $l = v_f \cdot \tau$， 但$l >> a$。

在量子力学中，导电电子的一个完整图象是：电子以$v_f = 10^6\ m/s$的速度作无规则运动，但整体有一个极其缓慢 $10^{-4}\ m/s$的漂移速度。

解决经典图像的问题：

1．电阻率的温度依赖关系

① 即使 T=0，量子图像中电子仍以费米速度运动，$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \to \frac{\lambda}{v_f}$，因此仍会碰到杂质从而产生电阻，这就是 ρ_0 的来源！（经典图像中 $\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \to \infty \quad (T \to 0)$，低温下电子运动极其缓慢，散射时间无穷长！）

② T 上升，无规运动变大， 更快遇到杂质， τ 变小， ρ 变大

$\rho = \rho_0(1+\alpha T)$，但解释此线性依赖关系要用到费米球的概念，这里不再进一步介绍了。

2． 对第二个问题， 量子力学建立之后，**Heisenberg** 把这个问题交给了他的学生 **Bloch**，**Bloch** 完美地解决了这个问题，并因此获得了 **Nobel** 奖。

习题：
P．674， Questions：4，
Problems：2，4，6，8，10，14，16