第 31 讲

复习：

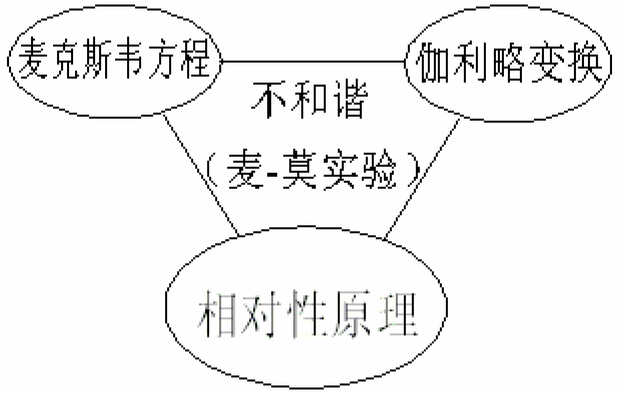
- 历史上最大的挑战来自 Maxwell 方程

  光速c在哪个惯性系测的？ 绝对坐标系，“以太系”。

  迈克尔孙—莫雷实验，寻找“以太系”，或地球相对“以太系”的速度

结论：没有相对速度！

惊人：地球是“以太系”？考虑地球自身的公转及自转，怎么可能？



1900 年，开尔文认为“晴朗的天空远处有两朵乌云”。其中一朵是“以太”漂移的 0 结果。

（三）解决方案

<u>爱因斯坦的选择：放弃伽利略变换</u>

(a) Maxwell 方程组取得了巨大的成功，被大量的实验事实所证实，没有理由认为其不正确。

(b)相对性原理，没有理由认为上帝选择地球作为绝对坐标系，地球一定仅仅是千千万万个惯性坐标系的一个（地球本身的相对运动有多大！）~ 30公里$/s$，因而另一个惯性坐标系也应当成立（即使在地球上成立），只能放弃伽利略变换。

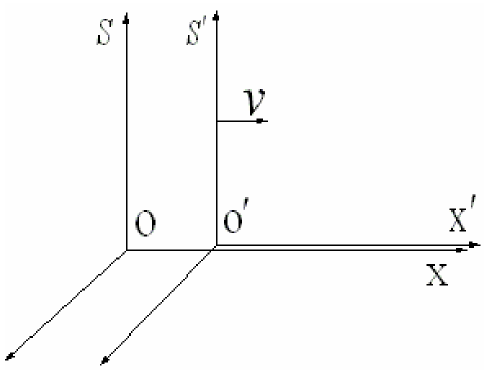
小心：伽利略变换对力学正确！！！

放心：那里是低速 $v \ll c$，只要我们选择新的变换在此条件下回到伽利略变换即可。

$\boxed{\text{相对性原理+Maxwell 方程组} \quad \Leftrightarrow \quad \text{光速在任意坐标中不变 } c}$

有了这两个基本假设，我们可以推出一个新的时空变换替代伽利略变换。

洛伦兹变换



光速不变 $\Rightarrow$ 洛伦兹变换的直接后果

$t = t^{'} = 0$ 时，S 与 $S^{'}$ 重合　　　$x^{'} = y^{'} = z^{'} = 0$

假设此时发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是 c。所以 t 时刻 S 系中光到达的位置满足

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2} \qquad (1)$$

存在两事件：　1 发射　　$(0,0,0,0)$

2 接收　　(x, y, z, t)

在 $S^{'}$ 看来，同样的事件应用描述

1　发射　　$(0,0,0,0)$

2　接收　　$(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'})$

根据光速不变原理，变换后的 $(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'})$ 必须满足

$$\boxed{x^{'2} + y^{'2} + z^{'2} = (ct')^2} \qquad (2)$$

伽利略变换

$$\begin{cases} x^{'} = x - vt \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z \\ t^{'} = t \end{cases}$$

显然不能满足。洛仑兹发现要满足（2）式的约束[在（1）式成立的前提下]，时空必须耦合在一起。洛伦兹提出他的坐标变换：

$$\boxed{\begin{cases} x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left(t - \dfrac{v}{c^2} x \right) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}} \qquad (3)$$

的确，利用洛仑兹变换，

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[x^2 + (vt)^2 - 2xvt + (y^2 + z^2)(1 - v^2/c^2) \right]$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[c^2 t^2 + (vt)^2 - 2xvt - (c^2 t^2 - x^2)\left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[c^2 t^2 + (vt)^2 - 2xvt - (vt)^2 + x^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[c^2 t^2 - 2ct\frac{v}{c} x + \left(\frac{xv}{c} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[ct - x\frac{v}{c} \right]^2 = (ct')^2$$

也就是说，在S'系中观测事件传播的速度仍为c，而且是各向同性的—尽管S'相对S沿x轴运动，在S'系中看到的速度沿x轴与其它轴没有任何的不同！直接解决了迈—莫实验的问题，如果在S'系中的光速仍上常数且各向同性，当然干涉条纹没有移动。

（四）相对论多普勒效应

1．非相对论多普勒效应

因一般波（如声波，绳波）存在于波介质中，因此波源及接受器相对于介质

的运动都须考虑。设波源与接收器的运动速度分别为u, u'，而波在静止媒质中的运动速度为v，则

Δt 时间内，波源的振动次数 $\Delta N = \Delta t \cdot f$ （f 为频率）

波源静止时，发出的波振列长度为 $l = v\Delta t$

波源动时，波振列长度为 $l^{'} = (v-u)\cdot\Delta t$

这段长为 $l^{'}$ 的波振列被静止的接收器接收时间为

$$\Delta\tilde{t} = l^{'}/v\ 。$$

当接收器运动时，其接收的时间为

$$\Delta t^{'} = \frac{l^{'}}{v-u^{'}}$$

运动的接收器 $\Delta t^{'}$ 时间内收到 ΔN 个振动，在它看来频率为

$$\boxed{f^{'} = \frac{\Delta N}{\Delta t^{'}} = \frac{\Delta t \cdot f}{(v-u)\Delta t}(v-u^{'}) = \frac{v-u^{'}}{v-u} \cdot f}$$

前面我们曾推出当观察点相对波介质运动时，看到的波的场为

$$y(x,t) = \cos[(\omega - ku')t - kx]$$

因此，运动的接收器观测到的波的频率为

$$\omega' = \omega - ku = \omega - \frac{\omega}{v}u = \omega(1 - u'/v)$$

与上面 u = 0 时的结果一致。

当 $u^{'}, u \ll v$ 时，

$$f^{'} = \frac{1-\frac{u^{'}}{v}}{1-\frac{u}{v}} f \approx (1-\frac{u^{'}}{v})(1+\frac{u}{c}) f \approx (1+\frac{u-u^{'}}{v}) f$$

$$f^{'} - f \approx \frac{u-u^{'}}{v} \cdot f$$

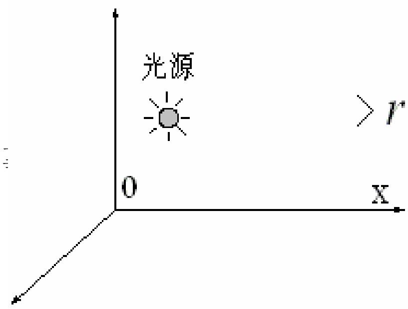
2．相对论多普勒效应

光波传播无需介质，且光速在任何系中均为 c，因而只须考虑光源与接收器的相对运动。

$S^{'}$ 系中，源以 v 运动，接受器静止，

S 以 v 相对 S 运动，源相对 S 静止

在 $S^{'}$ 系有两事件，源开始/结束做 N 次振动。此 2



① 开始　　　　　　$(0,0)$ $\leftarrow$ 源的位置，时间

② 计数 N 次振动 $(v\Delta t^{'},\Delta t^{'})$

此信号以 c 传播，到接收器时（接收器静止在 R 处），相应的事件为：

（3） 开始接收　　$\left(R,\dfrac{R}{c}\right)$

（4） 接收第 N 个　　$\left(R,\Delta t^{'}+\dfrac{R-v\Delta t^{'}}{c}\right)\Rightarrow\left(R,\dfrac{R}{c}+\Delta t^{'}(1-\dfrac{v}{c})\right)$

在 S' 系中静止的接收器接收此 N 次振动花的时间 $\Delta\tilde{t}$ 为

$$\Delta\tilde{t}=\Delta t^{'}\cdot(1-\beta)\quad \text{定义}\ \beta=v/c$$

这部分的贡献是波源运动产生的波阵列被压缩，在非相对论多普勒中已有显现效应。

然而我们还必须回到在 S 系中（光源静止）考察源的频率。

S 相对 $S^{'}$ 以速度 v 运动，发生在 S’ 系中的两事件发生在 S 系中时空点分别为：

① $(0,0)$　　即 (x_1,t_1)

② $(0,\Delta t)$　　即 (x_2,t_2)

即在 S 系中两事件发生在同地（$\Delta x=0$）。

据洛氏变换，两系时间间隔的关系为：

$$\Delta t^{'}=\frac{\Delta t+\frac{v}{c^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δt 为原时（即在源静止的系中测得的时间间隔）

$$\Delta t^{'}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ $\leftarrow$ Δt 为原时（静止时的时差）

$\Delta t^{'}$ 为运动系中的时间差，膨胀

综合起来，

$$\Delta\tilde{t}=\Delta t^{'}\cdot(1-\beta)=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta)=\Delta t\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

同样接收 N 次振动，时间不同，频率相应为：

$$\tilde{f} = f_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

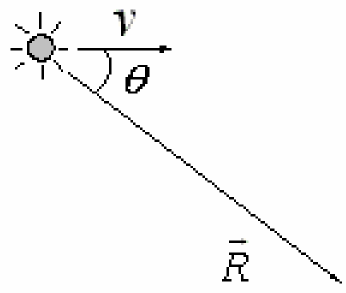
此时多普勒效应包括两个效应

① 时间膨胀

② 运动源使周期变短

＊ 一般情况（如图所示）：（3）、（4）须做相应修改。

（3）$(\vec{R}, \frac{R}{c})$



（4）$(\vec{R}, \Delta t' + \frac{\sqrt{(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta - v\Delta t')^2}}{c})$

则接收器耗时为：

$$\Delta\tilde{t} = \Delta t' + \frac{\sqrt{R^2 + (v\Delta t')^2 - 2Rv\cos\theta\Delta t'}}{c} - \frac{R}{c}$$

$$\approx \Delta t' + \frac{R}{c}(1 - \frac{v\Delta t'\cos\theta}{R}) - \frac{R}{c}$$

$$= \Delta t'(1 - \beta\cos\theta)$$

$$= \Delta t_0(1 - \beta\cos\theta) \Big/ \sqrt{1-\beta^2}$$

注意： 时间膨胀效应仍在：

$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$， 因此

$$\tilde{f} = f_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

即使 $\cos\theta = 0, \theta = 90^\circ$， $\tilde{f}$ 仍有频移， $\hat{f} = f_0\sqrt{1-\beta^2}$

这完全是一个相对论效应 – 由时间膨胀引起的。