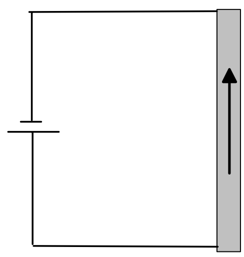
第 28 讲

复习：

- 共振的特征：$\boxed{I \to \infty \quad , \quad \phi\ (-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2})}$；品质因数$Q=\frac{\sqrt{X_L X_C}}{R}=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$刻画了共振的纯净程度；共振时能量在 L 和 C 之间振荡，相互转化。
- 阻尼振荡　　$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ ，$\tau=\frac{2L}{R}$
- Maxwell 方程组 （1）$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=q/\varepsilon_0$ ，（2）$\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ ，（3）$\oint\vec{B}\cdot d\vec{s}=0$，然$\oint\vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{\ell}\neq\mu_0 I$ ，为什么？

（二）位移电流

a) 简单回答（答案 1）



有限长度导线不能通稳恒电流

一定要接其它导线使其闭合

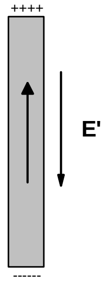
因此　　$\vec{B}_T\neq\vec{B}_1+\vec{B}_{other}$

$\oint\vec{B}_T=\mu_0 I$　仍成立 （其只对稳恒电流成立）

（无限长导线可以认为其它部分处于∞处，对$\vec{B}_T$无贡献）

b) 深层次考虑（答案 2）

的确没有其它导线，如何？此时$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}\neq\mu_0 I$等式的右边须做修正。怎样修正？



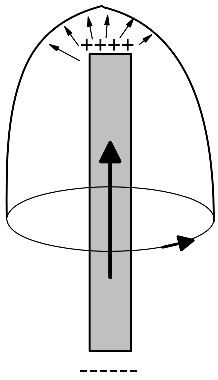
此时，因电荷的连续性，电荷在终端产生积累电流不可能稳恒，因导线内的驱动电场为

$\vec{E}_T=\vec{E}_0+\vec{E}'$，　故：$\dot{I}\neq 0$

对非稳恒电流，最简单、最直观的修正方法为：

$\mu_0 I\to\mu_0(I+\alpha\dot{I})$　（稳恒时回到从前）

然而注意到另一个事实，如右图所示：



若取 $\oint d\vec{\ell}$ 所包围的曲面

为如图所示，则 $I\equiv 0\ \dot{I}\equiv 0$

做修正 $\mu_0 I\rightarrow\mu_0(I+\alpha\dot{I})$ 仍不正确！

究竟应当如何修正？

麦克斯韦注意到此事实，给出了正确的形式----**位移电流**

当电流在终端停止时，$I=0$ 不能流动，电荷积累在支端(电流不闭合的代价)

但电场（而且是变化的）被建立起来了，作为 I 不稳恒的代价（结果）

$$\boxed{\dot{I}\neq 0(\dot{\vec{j}}\neq 0)\quad\Rightarrow\quad q\neq 0(\rho\neq 0)\quad\Rightarrow\quad\vec{E}(q,t)}$$

又注意到与 Faraday 定律的对称性 $\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\phi_B$

Maxwell 提出，正确的修正应当加上一项位移电流项：

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

定义：$\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ 为位移电流密度（有电流密度的量纲）， 则通过一截面的位移电流为：$I_D=\int_S\vec{j}_D\cdot d\vec{s}$，则安培定律可以形式地写为

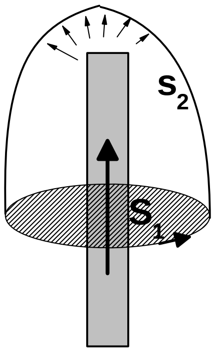
$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(I_C+I_D)$$

其中 $I_C(I_D)$ 为传导（位移）电流。

<u>对此改写的深层次的物理讨论</u>

（**1**）此位移电流形式虽由 Maxwell 第一个写出来，其并非一个完全独立的实验定律 ------ 它可以由 B-S 定律+电流守恒定律推出（电动力学的范畴，在此不多费笔墨）

（**2**） 因来源显得很“诡异”，初学者常常误以为位移电流是Maxwell凭空猜测出来的。其实，除了对称性要求，<u>**此推广有其内在必然性**</u>。理解了它有利于我们深刻理解位移电流的本质，也有利于理解Maxwell为什么要做这样的推广。



假设安培环路定理被修改为$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\int_S \vec{G}\cdot d\vec{S}$

选如右图所示，对特定的$\oint d\vec{\ell}$积分回路，有两个不同的 S。则它们对应的积分应当相等：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\int_{S1}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\int_{S2}\vec{G}\cdot d\vec{S}$$

可改写为：

则 $\int_{S1}\vec{G}\cdot d\vec{S}-\int_{S2}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{G}\cdot d\vec{S}=0$

其中S为S_1与$-S_2$组成的闭合曲面。因此，我们用于代替$\vec{j}$的函数$\vec{G}$必须满足散度为 0 的性质，即

$$\boxed{\int_S \vec{G}\cdot d\vec{S}=0}$$

由电流守恒定理$\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{\partial}{\partial t}q$可知：当稳恒条件成立时，$\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$，因此此时$\vec{G}=\vec{j}$是自然的选择。即：

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}} \quad \text{--- 稳恒时。}$$

但一般情况下：$\frac{\partial}{\partial t}q\neq 0$ 故 $\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}\neq 0$，因此 $\vec{G}\neq\vec{j}$ （$\vec{j}$ 不满足条件）。

此时注意到$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=q/\varepsilon_0$ （高斯定理），带入流守恒方程得：

$$\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=0=\oint\left[\vec{j}+\varepsilon_0\dot{\vec{E}}\right]\cdot d\vec{S}$$

观察可知：

$\boxed{\vec{G}=\vec{j}+\varepsilon_0\dot{\vec{E}}}$ 为一般条件下的自然的选择，满足条件。

(3）位移电流的大小

在导线内部$\vec{j}=\sigma\vec{E}$ ，故$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\dot{\vec{j}}$ ，则位移电流为

$$I_D=\int_S \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\int_S \dot{\vec{j}}\cdot d\vec{S}=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\dot{I}_C$$

这个形式的确回到我们最初的假设（在导线内部），即加一项电流变化项。

若 I 以 $Ie^{i\omega t}$ 形式谐变，则 $I_D \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} I_c$。因此，当 $\boxed{\omega << \sigma/\varepsilon_0}$ 时，$I_D << I_C$，即位移电流可以忽略，上述条件既是**似稳场条件**，此时回到电工学方程。

注意：位移电流不是电流！！！可以将位移电流理解成是真实电流的空间延续，但并非只要存在真实电流就不存在位移电流。

<u>（三）电磁波</u>

（1）引子

我们已得到了 Maxwell 方程的最终形式（积分及微分）：

$$\begin{cases} \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0, \\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}, \\ \oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0, \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

“位移电流”的加入直接导致电磁波的产生，这也是 Maxwell 方程的直接推论。无源（没有电荷及电流）区， E，B 场的方程非常对称：

$$\begin{cases} \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 \int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

事实上右边所列的[E，H]的所满足的方程更对称 --- 这是历史的误会，以为 H 场为基本物理量。 观察此方程可以发现：

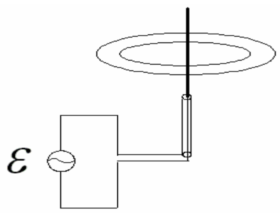
$$\left.\begin{matrix}\text{变化的磁场可以产生电场} \\ \text{变化的电场可以产生磁场}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{场可以脱离源而运动}$$

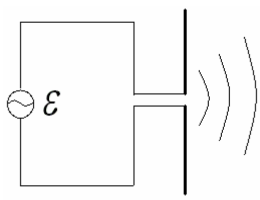
静止电荷 $\Rightarrow$ 静电场 $\vec{E}$， 稳恒电流 $\Rightarrow$ 静 $\vec{B}$

只有 $q\dot{v} \neq 0 \Rightarrow$ 动 $\vec{B} \Rightarrow EM$ 波 （加速运动的电荷才能辐射电磁波）。

（2）**电磁辐射**

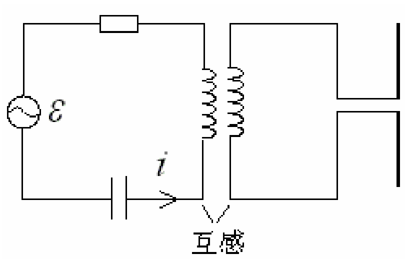
高频时，i_D 较重要，交变电流的辐射厉害





单极天线　　　　　　　　　　　　　　　　偶极天线

变化电流 $i = i_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow$ 电磁辐射



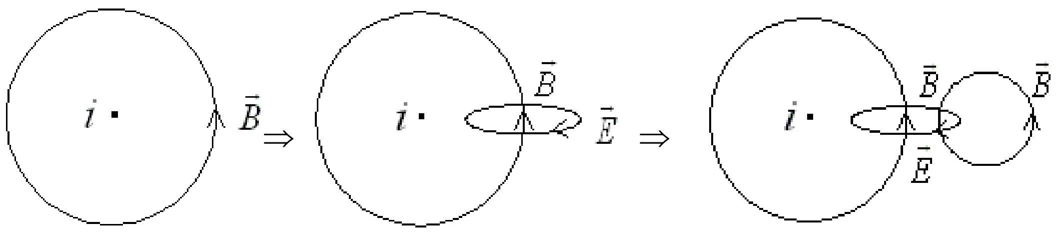
共振线路提供最大电流，提高辐射

完整的处理$\Rightarrow$电动力学、天线理论

简单图像（$\pm$号的不对称使场可以离开源）

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$：电场以 $\dot{\vec{B}}$ 作为源，满足左手法则

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$：磁场以 $\dot{\vec{E}}$ 作为源，满足右手法则

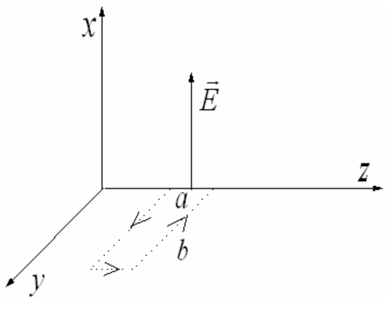


i变，$\vec{B}$变　　　　　　　　$\vec{E}$亦变　　　　　　　　$\vec{B}$脱离i而去

如果$\pm$号不对称性没有，能量不可能脱离源而去，只可能局域在电流的周围。

（3）电磁波的解

（i）假设 t 时刻 $\vec{E}$ 在 z 点 xy 平面内为一均匀电场，$\vec{E} = E_0\hat{x}$。取如下图所示的安培环路，则由 $\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 可知，



$$\left[B_y\left(z-\frac{a}{2}\right)-B_y\left(z+\frac{a}{2}\right)\right]\cdot b+\left[B_z\left(z+\frac{b}{2}\right)-B_z\left(z-\frac{b}{2}\right)\right]\cdot a$$
$$=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x(y,z)}{\partial t}\cdot ab$$

当 $a,b\to 0$ 时，

$$\left.\begin{aligned} 左边 &= -\frac{\partial B_y}{\partial z}\cdot ab+\frac{\partial B_z}{\partial y}\cdot ab \\ 右边 &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\cdot ab \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

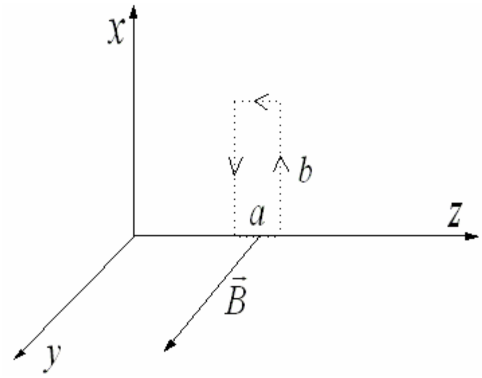
（其实同样的结果也可以由 Maxwell 方程的微分形式$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$推出）

（ii）假设t'时刻，z点处$\vec{B}$场已知

先取定如由图所示的安培环路，应用

$\oint_{C_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 可知

$$\left[E_x\left(z+\frac{a}{2}\right)-E_x\left(z-\frac{a}{2}\right)\right]\cdot b=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\cdot ab$$



在$(a,b\to 0)$时，$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}}$

同样道理，选取垂直于 z 轴的安培环路，应用 Faraday 定律可得

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial y}=0$$ （初始条件：$\vec{E}\,//\,\hat{x}$为均匀场）

因而 $\dot{B}_z=0$，考虑电磁波的解，可取$B_z=0$（静态的磁场解不是电磁波的解）。

因此（i）处得到的方程可简化为 $\boxed{-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}}$

综合上述 2 个方程可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}B_y\right)=-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}\end{cases}$$

此波动方程的解为

$$\begin{Bmatrix}E_x\\B_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}E_x^0\\B_y^0\end{Bmatrix}\cos(\omega t-kz)$$

$$k^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2\quad\Rightarrow\quad k=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega,$$

代入可得 $$\frac{E_x^0}{B_y^0}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$