第二十九讲

在一个特定的条件下（某一时刻电场||x, 为均匀场），在无源区导出电磁场满足的方程为

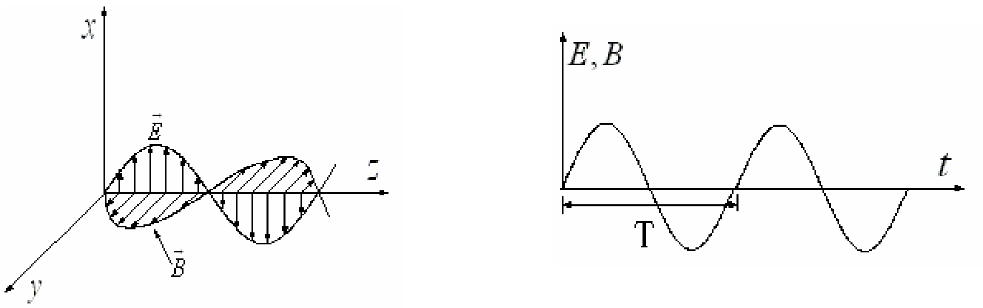
$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases} \quad \text{简化后可得：} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \end{cases}$$

此波动方程的解为

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ B_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_x^0 \\ B_y^0 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

$$k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega,$$

代入可得
$$\frac{E_x^0}{B_y^0} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$



电磁场在 t 时刻时在空间的分布及电磁场在某一位置处的随时间的变化。

其中

a) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ 称为波矢，λ 定义为波长：$\vec{E}(z+\lambda, t) = \vec{E}(z,t)\cos(k\lambda) = \vec{E}(z,t)$，物理意义为空间电磁场分布的周期。

b) $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 称为频率，T 定义为周期：$\vec{E}(z, t+T) = \vec{E}(z,t)\cos(\omega T) = \vec{E}(z,t)$ 物理意义是电磁场的时间分布周期。

c) $\dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c \approx 3\times10^8\ m/s$，为单位时间波向前走的距离（因一个时间周期内电磁波向前运行一个空间周期），物理意义是电磁波速（光速）；波速亦可看满足 $\phi(z,t) = \phi_0$ 的等相面传播：要求 $\omega\Delta t = k\Delta z$，意味着：$v = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} = \dfrac{\omega}{k} = c$。

d) 电场与磁场之间满足 $E_x^0 / B_y^0 = c$ 。

电磁波的重要性质：

a) 矢量波 $\leftarrow$ 与绳波，声波不相同

b) 横波性： $\vec{k} // \hat{z}$ ， $\vec{E}\cdot\vec{k}=0$ ， $\vec{B}\cdot\vec{k}=0$， $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$

c) 偏振： $\vec{k} // \hat{z}$， $\vec{E}$ 可以取 xy 平面内任意方向

$\vec{E} // \hat{y}$ ， $\vec{E} // \hat{x}$ 定义了两种偏振（极化）

（4） 电磁波的能流

电磁波的波动不仅把电磁场传递到远方，更重要的是将电磁能传递着。

已知电磁场的能量密度：

$u(\vec{r})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2+\frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2$ --- 其对动态的电磁场依然成立。

将平面波解解代入 $$\begin{cases} u_E(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t-kz) \\ u_B(\vec{r},t)=\frac{1}{2\mu_0}B_0^2\cos^2(\omega t-kz) \end{cases}$$

注意到 $\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{B_0^2/\mu_0}=c^2\cdot\varepsilon_0\mu_0=1$，则真空中电磁波电场能等于磁场能

$$\boxed{u_E(\vec{r},t)=u_B(\vec{r},t)}$$

为了求刻画能量传递的物理量，先对比其他东西传递的情形。

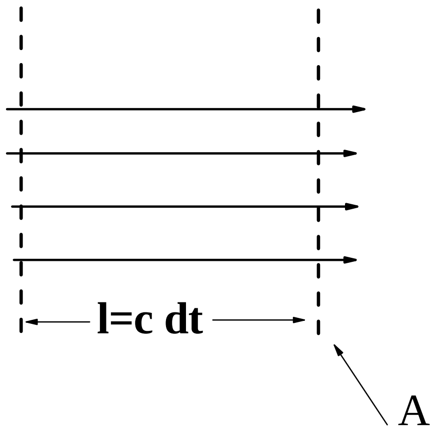
对比电流（电荷的流动）：已知电荷密度为 $\rho(\vec{r})$，电荷的运动速度为 $\vec{v}(\vec{r})$，

因此可定义电流密度为 $\vec{j}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$，这个量即刻画了电荷的流动的大小速度等。

与此相对应，可定义能流密度来刻画能量的传递情况。已知能量密度 $u(\vec{r})$，因电磁波在以 c 在传播，能流密度

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r})=u(\vec{r})c\hat{k}}$$

考察其物理意义。如右图所示，有一个面积 A，Δt 时间内通过此面积的能量为处于此面积前距



离 $l=c\cdot\Delta t$ 的电磁波所携带的能量（因它们在 dt 时刻内可以通过此面积），计算此体积内的电磁场的能量为

$$\Delta U_p=\int u(\vec{r})d\vec{r}\approx u(\vec{r})\cdot A\cdot c\Delta t=S(\vec{r})\cdot A\cdot\Delta t$$

故：

$$\boxed{S(\vec{r})=\frac{1}{A}\frac{\Delta U_p}{\Delta t}}$$

物理意义是：

能流密度为单位时间内单位面积上流过的能量（与电流密度完全一致）

更严格的定义为 Poynting 矢量：

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r})\equiv\vec{E}\times\vec{B}/\mu_0=\vec{E}\times\vec{H}}$$

对平面波可以证明此二式的一致性：

$$\vec{S}(\vec{r})=\vec{E}\times\vec{B}/\mu_0=\hat{k}\left(\frac{E_0B_0}{\mu_0}\right)\cos^2(\omega t-kz)$$

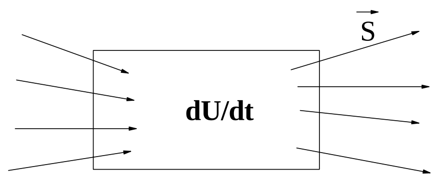
$$=\hat{k}\left(\frac{B_0^2}{\mu_0}c\right)\cos^2(\omega t-kz)=2cu_B(\vec{r})\hat{k}=cu(\vec{r})\hat{k}$$

类似电荷-电流守恒定律，可以严格证明

$$\boxed{\oint\vec{S}(\vec{r})\cdot d\vec{A}=-\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\vec{r})d\Omega}\quad\leftrightarrow\quad\text{能量守恒}$$

$$\updownarrow\qquad\qquad\qquad\updownarrow$$

$$\vec{j}\qquad\qquad\qquad\rho\qquad\leftrightarrow\quad\text{粒子数守恒}$$



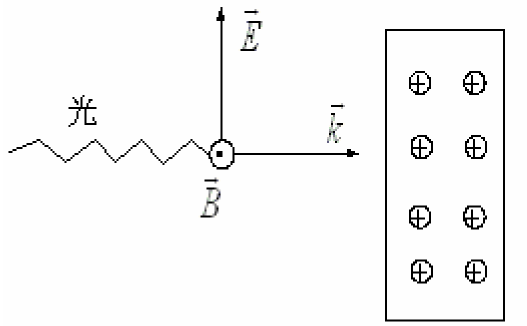
即：单位时间流入体积内的能量减去流出体积内的能量等于体积内的能量的净增量。

<u>电磁波的强度（光强）</u>：能流的平均值

$$\boxed{I=\bar{S}=\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\mu_0c}E_0^2=\frac{1}{\mu_0c}E_{rms}^2}$$

（5） 电磁波的动量及光压

电磁场作为物质，不光有能量，还有动量，下面用一个简单（甚至有些粗糙）的



单很有启发性的图像来考虑电磁波的动量。考虑光与物质的 2 个相互作用过程：

（1）$\vec{E} \quad \rightarrow \quad +q$运动$v \quad \rightarrow \quad \vec{F}_E = q\vec{E},\quad \vec{v}_d \propto \vec{E}(ohm$介质）

（$\boldsymbol{E}$ 反向，$\vec{F}_E$ 亦反向！）

（2）$\vec{B}$对q$\vec{v}$有作用$\rightarrow d\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B}$

($\vec{E}$反向，$\vec{B}$反向，$\vec{v}$反向,$\vec{F}_B$不变向！）

过程（1)：电磁场对体系做功，平均无作用力（ $\vec{F} = q\vec{E}, \langle \vec{F} \rangle = 0$ ）

过程（2)：电磁场对体系不做功，平均有作用力，则有动量传递！

<u>能量与动量紧密相关</u>

单位体积电荷的动量增加等于单位体积内电磁场的动量的减少

$$\frac{d\vec{P}_e}{dt} = nq\vec{v}_d \times \vec{B} = -\frac{d\vec{g}}{dt}$$

单位体积电磁场对电荷做功等于单位体积内电磁场的能量的减少

$$\frac{dW}{dt} = nq\vec{E} \cdot \vec{v}_d = -\frac{du}{dt}$$

$\vec{g}$ 为电磁场的动量密度

注意到 $\dfrac{nqEv_d}{nqBv_d} = \dfrac{E}{B} = c$

则严格得 $\dfrac{du(\vec{r})}{dt} = \left|\dfrac{d\vec{g}(\vec{r})}{dt}\right| \cdot c$

注意到矢量性，则完整的定义为：

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{c} u(\vec{r})\hat{k} = \frac{1}{c^2}\vec{S}(\vec{r})}$$

↑　　　　↑　　　　□

动量密度　电磁场的能量密度　能流密度

光压：

（1）全吸收。 Δt（远大于光波周期）时间内物体从电磁波中得到的动量为：

$$\Delta P=\overline{g}\cdot\Delta\Omega=\overline{g}\cdot c\cdot\Delta t\cdot A=\frac{1}{c^2}\overline{S}c\Delta tA$$

物体受力为：$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{1}{c}\overline{S}A$，光压（单位面积受力）$p=\frac{F}{A}=\frac{1}{c}\overline{S}=\frac{I}{c}$

（2）全反射。Δt时间内得到动量翻番：

$$\Delta P=2\overline{g}\cdot\Delta\Omega=2\frac{1}{c^2}\overline{S}c\Delta tA$$

光压（单位面积受力）$p=\frac{F}{A}=\frac{2}{c}\overline{S}=\frac{2I}{c}$

狭义相对论

（一）经典力学的时空观

绝对时空及伽利略变换

两坐标系，S'相对于S以 v 向+x 方向运动（假设 t=0 时两系重合），

一个事件，在 S 系看来发生在(x,y,z,t)，

同一事件，在 S' 系看来发生在(x',y',z',t')，

(x,y,z,t)与(x',y',z',t')有何关联？

牛顿认为：“时间的流逝是均匀的，与任何外在的情况无关”

-----（《自然哲学的数学原理》），

因而，　$t=t'$

牛顿认为：“存在一个绝对的空间不与任何外在的情况相关”

因而，此事件的发生地点（一个在绝对空间中的某一绝对点）在 S 系为 (x,y,z)，在 S' 系“显然”为：

$$
\begin{cases}
x' = x - vt \\
y' = y \\
z' = z
\end{cases}
$$

此称为伽利略变换。
速度在不同坐标系中的定义分别为：

$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$，因而相互关系：

$$u_x' = u_x - v, u_y' = u_y, u_z' = u_z$$

伽利略的相对性原理

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$，成立的坐标系叫<u>惯性系</u>。一个相对于惯性系做匀速运动的坐标系也是惯性系。在所有的惯性系中牛顿力学的规律完全一样，这个原理叫做**相对性原理**。伽利略最早表述为 --- “在一个匀速行驶的船舱里，如果船没有左右摇晃，没有忽快忽慢，你做任何的力学实验都不会发现与在地上做相同的实验有任何的不同”。
此原理与伽利略变换一致：

$$
\begin{aligned}
&a' = \frac{du_x'}{dt} = \frac{d}{dt'}(u_x - v) = a, \\
&m' = m, F' = F
\end{aligned}
$$

在牛顿力学的框架中，$m' = m, F' = F, t' = t$ 都被认为是“常识”，直接接纳。

牛顿力学	伽利略相对性原理	伽利略变换
(某科学规律)	(惯性系等价假设)	(数学表述)

此三者是和谐的，承认其中两个必导出第三个。这套观念与我们的“common sense”一致，我们欣然而取之，亦被 19 世纪以前的力学的巨大成就所证实，看上去一切太平。几个假设，理论本身自洽，可以解释所有的实验。然而这后面蕴含有巨大风险，因为我们的 Common Sense 只是在低速范畴内才是正确的。

习题：P. 880, Problems, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 14