第六讲

复习：

* 高斯定理的应用：注意对称性分析

对球对称体系，球壳，球体（均匀） （非均匀）

$r > R, \quad E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

$r < R$ 各不相同

* 导体的静电平衡条件

$I \quad \rho_{in} = 0 \quad \vec{E}_{in} = 0$

II 在表面上 $\vec{E}_{\parallel} = 0$ ， $III \; E_{\perp}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})/\varepsilon_0$（$\sigma$ 是未知量）

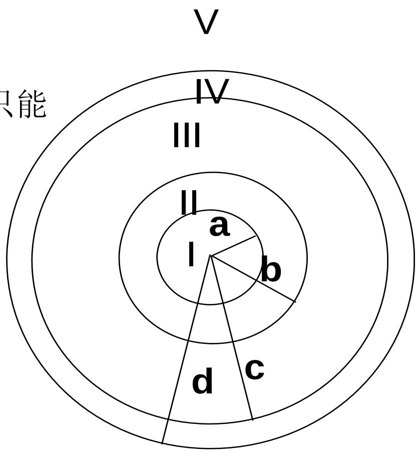
（3）同轴电缆静电平衡

同轴电缆是由两个同轴的柱状导体壳嵌套而成的，它在现代通信业中有着重要的应用。考虑这种体系的静电平衡问题，设

内导体（处在 $a < \rho < b$ 范围）上导体单位长度的电量 λ

外导体（处在 $c < \rho < d$ 范围）上导体单位长度的电量 λ'

求平衡时电荷分布及电场分布。



解：根据导体静电平衡时的第一个基本性质， 电荷只能分布在内外导体的 4 个表面上。

设四表面的单位长度电量为：

$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$,

先寻 4 条独立方程确定电荷分布。

由电荷守恒： $\lambda_a + \lambda_b = \lambda$ （1）

$\lambda_c + \lambda_c = \lambda'$ （2）

导体内部电场为 **0**，则

当 $a < \rho < b$ 时， $E_{II}(\rho) \equiv 0$;

当 $c < \rho < d$ 时， $E_{IV}(\rho) \equiv 0$ 。

根据体系的对称性，电荷在 4 表面上均匀分布，因此电场的方向平行于 $\hat{e}_\rho$，大小只依赖于 ρ： $\vec{E} = E(\rho)\hat{e}_\rho$ 。 这与导体静电平衡时的第二个性质 $\vec{E} \parallel \hat{e}_\rho$（在导

体表面处）一致

在 II 区以 ρ 为半径以单位长度为高做一个高斯柱面，利用高斯定理，

$$0=\oint\!\!\!\oint \vec{E}_{II} d\vec{S}=\lambda_a/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_a=0 \qquad (3)$$

在 IV 区以 ρ 为半径以单位长度为高做一个高斯柱面，利用高斯定理，

$$0=\oint\!\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=(\lambda_c+\lambda_a+\lambda_b)/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_c+\lambda_a+\lambda_b=0 \qquad (4)$$

（1）-（4）为确定 4 个未知量的必要的 4 个方程， 解之可得，

$$\begin{cases} \lambda_a=0 \\ \lambda_b=\lambda \\ \lambda_c=-\lambda \\ \lambda_d=\lambda'+\lambda \end{cases}$$

再根据求得的电荷分布求电场分布

在 I，III，V 三个区各做相应的同轴柱面作为高斯面，利用高斯积分计算可得

$$E_I(\rho)\cdot 2\pi\rho=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_I(\vec{r})=0$$

$$E_{III}(\rho)\cdot 2\pi\rho=\lambda/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{III}(\vec{r})=\hat{e}_\rho\lambda/2\pi\varepsilon_0\rho$$

$$E_V(\rho)\cdot 2\pi\rho=(\lambda+\lambda')/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_V(\vec{r})=\hat{e}_\rho(\lambda+\lambda')/2\pi\varepsilon_0\rho$$

而在 II， IV 区，导体内场恒为 0，

$$\vec{E}_{II}(\vec{r})\equiv 0$$

$$\vec{E}_{IV}(\vec{r})\equiv 0$$

用导体的静电平衡第 3 个特性验证所得的结果

根据所得结果，导体表面电场为：

$$E_I(\rho)|_{\rho=a}=0=\frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}$$

$$E_{III}(\rho)|_{\rho=b}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}=\frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0 b}=\frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}$$

$$E_{III}(\rho)|_{\rho=c}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 c}=-\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0}$$

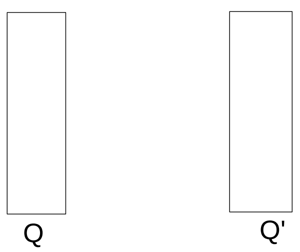
$$E_V(\rho)|_{\rho=d}=\frac{\lambda+\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 d}=\frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}$$

所得的结果均满足导体静电平衡时的第 3 个性质。

注意：导体静电问题的难点在于不知道电荷分布，因此要充分利用导体静电平衡时的三大特性，建立合适的方程求解电荷分布。对这类问题，首先想到的是电荷守恒定律。

<u>（**4**）更困难的例子</u>：

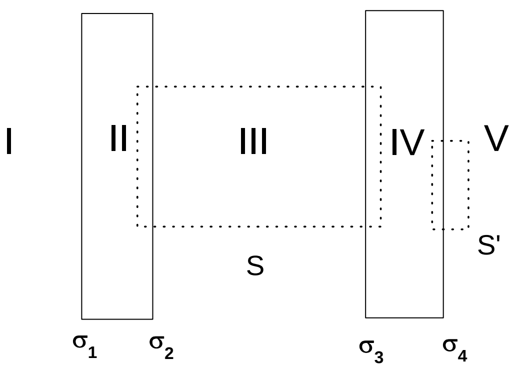
两个大导体平板，面积均为 A，分别带总电量 Q，Q’，忽略边缘效应，求平衡时的电场及电荷分布。



解： 此时的电荷分布要重新确定， 电荷分布为未知量。跟据对称性，忽略边缘效应，则电荷在表面上必均匀分布，电场在空间任意一点均垂直于板。设平衡时电荷在 4 个表面上的面密度分别为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_3$，必须要找出 4 条方程来确定这 4 个未知数。 导体上的电荷可以自由移动，但<u>电荷守恒</u>仍需满足：

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=Q/A & (1)\\ \sigma_3+\sigma_4=Q'/A & (2)\end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{电荷守恒}$$

还需要 2 个方程才能完全确定所有未知数。充分发掘导体静电平衡时的特性及利用高斯定理来寻找这 2 个方程。构造如图两个高斯面 S，S’（截面积为单位面积）



对高斯面 S

$$0 = E_{III} - E_{IV} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\varepsilon_0}$$ （3）← 导体内电场 $E_{III} = E_{IV} = 0$

对高斯面 S’

$$E_V - E_{IV} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = E_V$$

但我们必须确定 E_V。据平面电荷的电场的叠加可得：

$$E_V = \frac{1}{2\varepsilon_0}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4],$$

综上 2 式可得第四条方程：

$$\frac{1}{2}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4] = \sigma_4$$ （4）

解（1）-（4）可得：

$$\sigma_1 = \frac{1}{2A}(Q + Q') \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2A}(Q - Q')$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2A}(Q' - Q), \qquad \sigma_4 = \frac{1}{2A}(Q' + Q)$$

根据电荷分布可以确定电场（利用导体静电平衡的性质 **3**，朝右为+方向）：

$$E_I = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = -\frac{Q+Q'}{2\varepsilon_0 A}, \qquad E_{II} = 0$$

$$E_{III} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q-Q'}{2\varepsilon_0 A}, \qquad E_{IV} = 0$$

$$E_V = \frac{Q+Q'}{2\varepsilon_0 A}$$

注：

（a）也可以根据 4 个电荷分布利用面电荷的电场公式 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ***来计算空间各点的电场。试计算之，并与上面结果相比较。***

(b) 考虑两个特例：

1. $Q = Q'$，***则，*** $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = \sigma_4 = Q/A$，***即电荷全部分布在外表面；***

2. $Q = -Q'$，***则，*** $\sigma_1 = \sigma_4 = 0, \sigma_2 = Q/A, \sigma_3 = -Q/A$，***即电荷全部分布在内表面；***

第 28 章 电势能与电势

（1）<u>电势的概念</u>　　　　　　与引力势的对比

电场	$\Leftrightarrow$	引力场
电力	$\Leftrightarrow$	引力
电势能	$\Leftrightarrow$	势能

电场（矢量），电势（标量）是静电理论的两种表达式，**但并非所有的场都可以有标量表达形式。**

（2）<u>环路定理</u>

静电场的一个重要性质是其满足环路定理。

<u>(a) 点电荷产生的电场</u>

能引入势能的前提条件是场做功与路径无关，又叫<u>保守场</u>

电场对外电荷的做功　　$W=\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$

先从点电荷做功出发　　$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{e}_r$

场对 q 的作用力　　$\vec{F}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}\hat{e}_r$

电场做功为：　　$W=\int_i^f \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}\hat{e}_r\cdot d\vec{\ell}$

对于任意一条路径，我们总可以将其分成非常小的小段，则电场做的总功为这些小段上的贡献的叠加：

$$W=\sum_i \Delta W_i=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{1}{r_i^2}\hat{e}_r\cdot\Delta\vec{\ell}_i$$

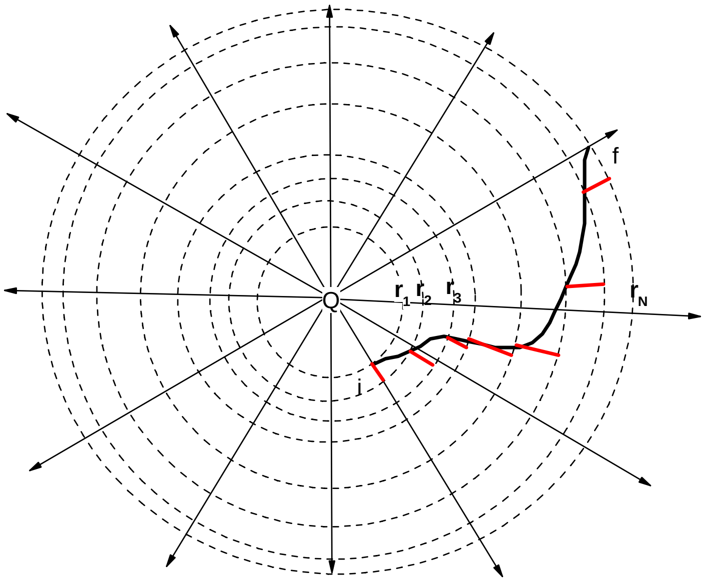
对每一小段，$\hat{e}_r\cdot\Delta\vec{l}=\Delta r$，即 $\Delta\vec{l}$ 投影在径向的距离。则，电场在这一小段对电荷做功为

$$\Delta W_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_i^2}\Delta r_i$$

所将每一小段的做功相加，则有

$$W = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r_i^2} \Delta r_i = \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} dr$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_f} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f})$$



电场对电荷的做功与路径无关！

（b）<u>线性叠加原理</u> → 此结论对任意电荷分布成立！

$W = \int_i^f d\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ 不依赖于路径

<u>（保守场） 向心力是根本！</u> $\vec{F} \parallel \hat{e}_r$

向心力，任意路径可以分成 $\hat{e}_r + \hat{e}_\theta$

$\vec{F}$ 做功沿 $\hat{e}_\theta$ 的路径积分为 0

$\vec{F}$ 只对沿 $\hat{e}_r$ 方向的路径做功

可以马上推出电场的环路定理

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

C 指任意闭合路径。

（3）电势能的定义

有过程，$i \to f$，场对带电体做功，$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

使物体的机械能增加：$\Delta K = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

能量哪里来？ 由**电场与电荷的相互作用能**的减少作为代价

电场与电荷的相互作用能定义为电势能（可以与引力势能相比较）

将电场与带电体作为一体来考虑，根据能量守恒，则在 i—f 的过程中，总能量守恒。在这个过程中，外电场没有发生变化，带电体自身的电场没有发生变化，只有带电体在外电场中的相对位置有关，即相互作能（电势能）发生了改变。故：电势能的减少等于机械能的增加

$$\Delta U + \Delta K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta U + \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\Downarrow$$

电势能的数学定义 $\boxed{U(f) - U(i) = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}$

习题：P.630, Exercises, 15 (不要预先假设电荷分布在内表面！)， 25
P.631-633, Problems, 8, 14, 16