第十三讲

复习：

① 介质极化的完整图像

$$\vec{E}_0 \Rightarrow \ \vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}_0 \ \Rightarrow \ q_p \ \Rightarrow \ \vec{E}_p \Rightarrow \vec{P}=\varepsilon_0\chi(\vec{E}_0+\vec{E}_p)$$

自恰

② 介质中的高斯定理：

辅助矢量：电位移矢量 $\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})+\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}(\vec{r})$

$$\oint\!\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}=q_f$$

1）电位移矢量是一个辅助矢量，本身不具有明确的物理意义。虽然其与源电荷产生的电场满足一样的高斯定理，或者说 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}_f$ 两种场的散度性质一样，因两者具有可能不同的旋度性质，仍然不能认为两者是一样的。

2）$\vec{D}$ 满足的高斯定理始终是严格的。但 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系只有在线形介质中才满足 $\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}(\vec{r})$。一般情况下，只能用 $\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})+\vec{P}(\vec{r})$。

3）计算电介质的问题，可以遵从 $q_f\to\vec{D}\to\vec{E}\to\vec{P}\to q_p$ 的计算次序，最终用计算得到的 q_p 验证所得电场是否正确。

电容

（一）定义

电容顾名思义是电荷的容器，更本质讲是静电能的容器。它的用处有断电保护，产生电场，调谐振频率等。它在电学中具有重要的意义。

看一个最简单的电容器的定义：设有两个导体组成的一个器件，当两导体分别带 $+q,-q$ 电量时，它们的电势差为 $\Delta V=V_1-V_2$，则定义这个电容器（capictitor）的电容（capacitance）为

$$C=\frac{q}{\Delta V}$$ 其单位为库/伏=法拉

物理意义位：单位电势差下，存储在器件中的电量的大小。显然 C 越大，同等条件下（比如接同样的一个电池），此电容器中存储的电荷量就越大，反之亦然。

怎样给电容器充电？ 通常将导体分别接电池（源）两端，显然此时ΔV是确定的。

注意：本课程中C的定义事实上是“互电容”，定义对一种特定的电容器（只包含2导体，且规定其带等量异号电荷）。 一般情况下，电容器可能包含任意多的导体，这种情况下，更普适的定义是C_{ij} 电容系数

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \cdot V_j$$

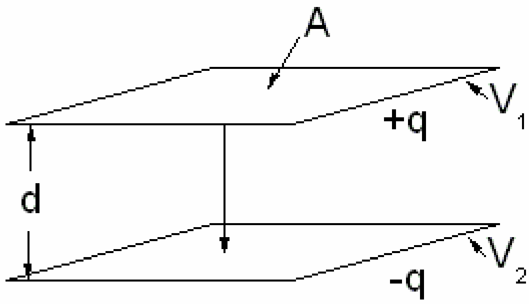
可描述任意导体体系中导体的带电量与电势的关系。 总之C描述的是电量与电势的线性关系，其大小与几何结构有关。

（二）举几个特例：

（1） 平行板电容：

设有两块导体平板（面积为A）平行放置（相距d），假设$\sqrt{A} >> d$，可以忽略边缘效应，平行板内部的电场可以看成均匀场。

板上的面电荷密度为 $\sigma = \dfrac{q}{A}$



则两板中的电场：

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

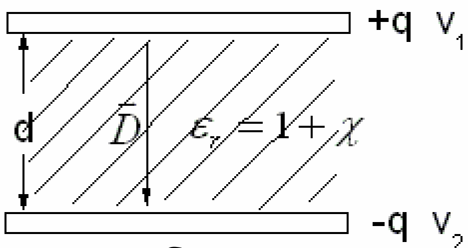
两板之间的电势差可得：

$$V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q \cdot d}{\varepsilon_0 A}$$

则电容可得： $$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

→ ① $C \propto A$，面积大则q大；

② $C \propto 1/d$，d大则所需电压大；



如果平行板之间充满电介质，如何?

充电电压ΔV不变，求q？现在

假设q知，求ΔV更方便。

q为q_f——自由电荷(不管极化电荷如何，我只关心q_f)。由$\vec{D}$满足的高斯定理

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_f \quad \text{可知} \qquad D = \frac{q_f}{A} \text{——均匀场，}$$

则可计算 E 场：

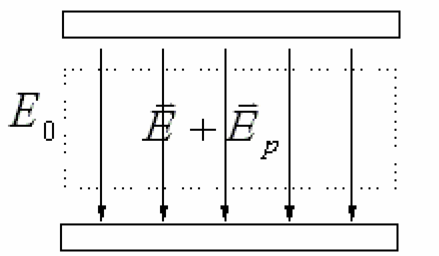
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q_f}{\varepsilon_0\varepsilon_r A},$$

进而可以计算电势差

$$V_1 - V_2 = Ed = \frac{q_f d}{\varepsilon_0\varepsilon_r A}$$

$$C = \frac{q_f}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d}$$

介质的存在能提高电容 *C*，即提高电容器的储电能力。为什么？



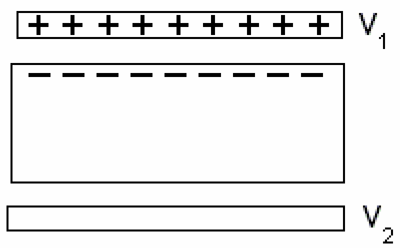
$\vec{E}_p$ “退极场”的存在

E_t 变小，因而电压变小

相同电荷，所需电压变小，电容变大。

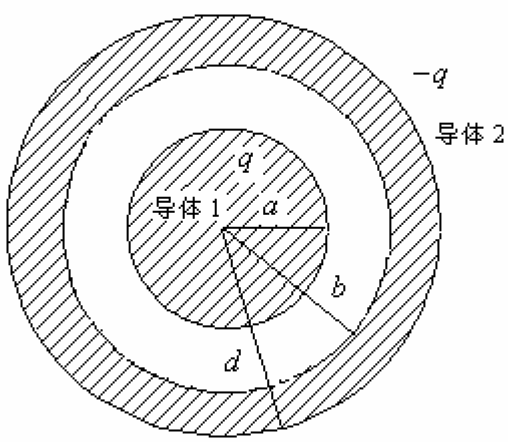
换个角度看：

保持 $\Delta V = V_1 - V_2$ 不变，则电场相同。



加介质的作用是产生反向的极化电荷，外界条件要求达到相同的电势差（电场），只能通过追加 q_f 来实现

（2）球状电容器



平板电容器虽然简单，但要求板较大（板小时有边缘效应，有漏电效应）。考虑其他形式的电容器，比如两个同心导体球（壳），

导体 1 $\quad r \le a \qquad q$

导体 2 $\quad b \le r \le d \qquad -q$

它们之间填满介质 $\varepsilon_r \quad a \le r \le b$

$\vec{E}$ 在导体中为 0， $\vec{D}$ 亦然

注意到对称性， $\vec{D}(\vec{r})//\hat{e}_r$

由高斯定理 $\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s}=q_f$ ，取半径为 r 球面为高斯面

$$D(r)4\pi r^2=q\text{，可得}\quad D(r)=\frac{q}{4\pi r^2}$$

线性 介质内部($a<r<b$)有 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ ，则

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{e}_r$$

电势差因此可计算为：

$$V_a-V_b=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}(-\frac{1}{r})\bigg|_a^b=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$$

电容值为：

$$C=\frac{q}{\Delta V}=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ab}{b-a}$$

讨论： ① $\varepsilon_r=1$ （ 空气，真空），则 $C=4\pi\varepsilon_0\dfrac{ab}{b-a}$

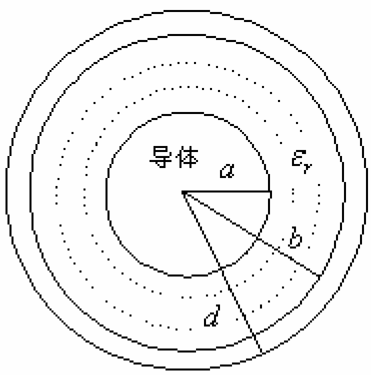
② ε_r （介质）的存在增加电容，物理原理与平板时一样。

③ 与平板电容的相似性： $b\approx a$ 时

$$A_1=4\pi a^2\quad A_2=4\pi b^2\quad \bar{A}=\sqrt{A_1A_2}=4\pi ab$$

$$d=b-a\text{，则}\,C=\varepsilon_0\frac{\sqrt{A_1A_2}}{d}\approx\varepsilon_0\frac{\bar{A}}{d}$$

（3）柱状电容器



柱状电容器介于平板与球形之间。
设电容器总长为 L

导体 1 $\rho\le a$， 带电量 q

导体 2　$b \le \rho \le d$　　$-q$

中间为电介质，相对介电常数 ε_r　　$a \le \rho \le b$

由对称可知　$\Rightarrow$　$\vec{E} // \hat{e}_\rho$　,$\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$

电容器中有电介质 ε_r，根据介质中的高斯定理，利用 $\vec{D}$ 计算方便许多

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_f$$

$$D(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot h = \frac{q}{L} \cdot h$$

$$D(\rho) = \frac{q}{2\pi\rho \square L}$$

因介质为线性介质　$E(\rho) = \dfrac{D(\rho)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \rho L}$，由此可计算电势差

$$\Delta V = V_a - V_b = \int_a^b E(\rho) d\rho = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L} \ln(\rho) \bigg|_a^b = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L} \ln(\frac{b}{a})$$

则电容为：$C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(b/a)}$

讨论：

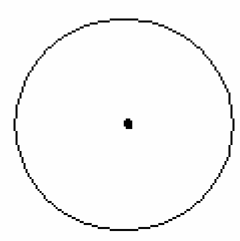
（i）ε_r 的存在使得电容变大，WHY？ 极化电荷产生在介质与金属的界面上，在效果上“抵消”自由电荷的影响，因而使得体系可以存储更多的电荷。

（ii）$b - a = d >> a$　时，回到平板电容器？

$$\ln(\frac{b}{a}) = \ln(\frac{a+d}{a}) = \ln(1 + d/a) \approx d/a$$

$$C \approx 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L \cdot \frac{a}{d} = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d}$$

（4）单个导体的电容



单个导体也可以贮存电荷，此时假设另一带等量异号电荷的导体为地球，或放 ∞ 处导体球。半径为 R，电势

为V 的导体球，贮存多少q？　（实际问题中往往知道V

，不知q，此处计算时由$q \to V$ 更方便）

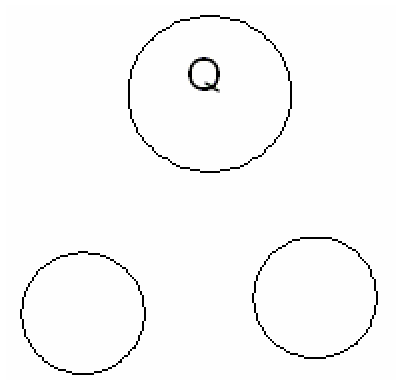
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

$$V = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C = {q}/{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

注意：不管什么样的电容，C 总是正比于一个某一个长度，具有长度的量纲。这事实上有很深的物理意义的。能量正比于$C^{-1}qq'$，$C \sim L$ 线度说明了体系中两个电荷的“平均分开的有效距离”。

（5）电容在现代科学中的应用



① 量子：　电容是个经典量，电荷是一个个的。量子力学中，电子不是点电荷。小尺寸系统电容如何定义？

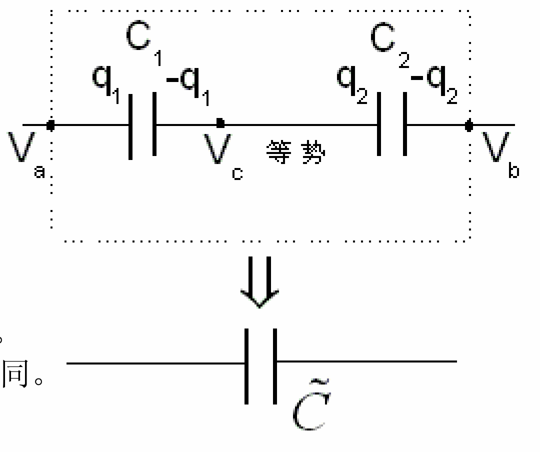
金属------绝缘体相变

电容能，与量子效应的竞争，超导体量子点阵更是由电容能与量子效应的竞争。引发了一对新的物理量，number 与 phase 的竞争。

② 经典物理

负折射材料，C, L 共振改变物质的有效　ε_r，μ_r

（三）电容的串联和并联



类似电阻，电容也有两种连接方式。

（1）串联

静态平衡时，导线中没有电势差

孤立导体，电荷守恒$q_1 = q_2 = q$，

两个串联的电容有效贮存的总电荷仍然为 q。但其所占据的电势差却与单个电容的不再相同。

$$C_1=\frac{q}{V_a-V_c} \qquad V_a-V_c=\frac{q}{C_1}$$

$$C_2=\frac{q}{V_c-V_b} \qquad V_c-V_b=\frac{q}{C_2}$$

等效来讲

$$\Delta V=V_a-V_b=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}$$

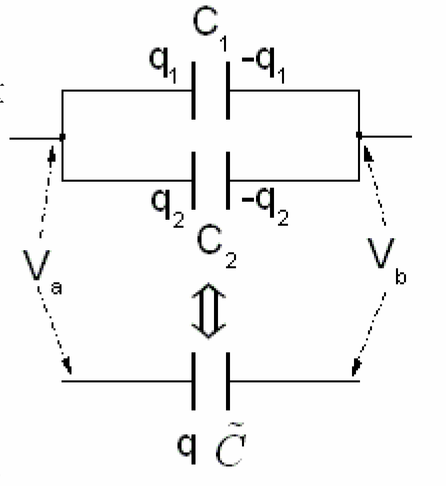
贮存电荷 q，因此总等效电容为

$$\tilde{C}=\frac{q}{V_a-V_b}=\frac{q}{\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}}=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

即： $$\tilde{C}^{-1}=C_1^{-1}+C_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{C}^{-1}=\sum_i C_i^{-1}$$ （多个电容串联情形）

（2）并联



$q=q_1+q_2$ —— 从电池处充得的总电量

V_a-V_b ——电池给的总电压

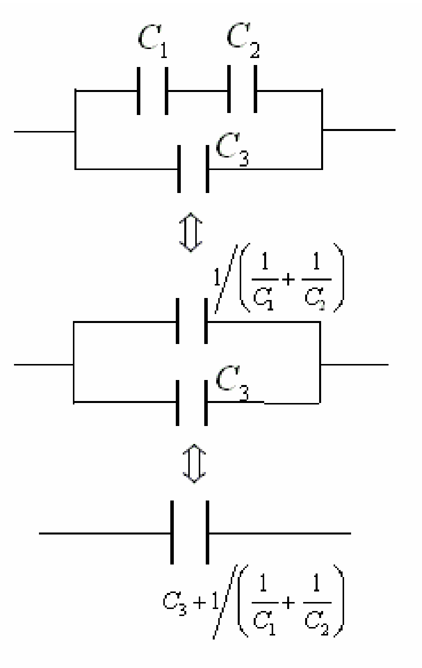
$$q_1=C_1(V_a-V_b)$$

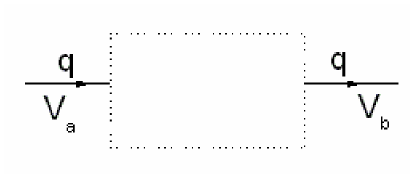
$$q_2=C_2(V_a-V_b)$$

$$\tilde{C}=\frac{q}{V_a-V_b}=\frac{q_1+q_2}{V_a-V_b}=C_1+C_2$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{C}=\sum_i C_i$$ $\Leftarrow$ 并联情形

（3）既有并联，又有串联





如图所示

$$\tilde{C}=\frac{q}{\Delta V}=C_3+\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}$$

习题：P. 693 Questions, 15,
P. 696 Problems, 4, 8, 10, 20, 24

1．球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的导体球壳所构成，球壳的内半径为 R_2，其间一半充满相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质，另一半为空气（如图所示）。设空气的相对介电常数为 1，求该电容器的电容 C。