第十二讲

复习

- $\vec{P}(\vec{r})=\chi\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$（外场对介电物质的极化），其中极化强度的定义为 $\vec{P}=\dfrac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$，它描述了宏观物质对外场的响应。$\chi$：极化率；它是刻画电介质的一个本征量，不同的电介质 χ 不同。（对比：$\vec{j}=\sigma\vec{E}$，χ、σ 的具体计算需参照“微观理论，量子理论”。）
- 知道了 $\vec{E}\Rightarrow\vec{P}$，那么 $\vec{P}$ 如何反过来 $\Rightarrow\vec{E}$？

  $\vec{P}$ 与极化电荷分布 ρ_P 的关系

$$-\oint_V \vec{P}\cdot d\vec{S}=Q_P=\iiint_V \rho_P(\vec{r})dV$$

因此，只要知道 $\vec{P}$ 的空间分布即可求知空间的极化电荷分布。（注意：在真空及金属中，$\vec{P}=0$）

（四）有介质存在时的电场及高斯定理

真空中电场强度 $\vec{E}\Leftarrow q$

介质中的电场强度 $\vec{E}=\vec{E}_f+\vec{E}_p$

$\vec{E}_f$（自由电荷产生的电场）$\Leftarrow q_f$（自由电荷）

$\vec{E}_p$(极化电荷产生的电场）$\Leftarrow q_p$（极化电荷）

根据库仑定律

$$\vec{E}=\vec{E}_f+\vec{E}_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_f(r')dr'^3}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_p(r')dr'^3}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (1)$$

$\vec{E}_f$ 和 q_f 之间及 $\vec{E}_p$ 和 q_p 之间分别满足高斯定理（高斯定理的推导中并不要求电场的来源是自由电荷还是极化电荷！只用到了库伦定律的平方反比性！）

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\oint\vec{E}_f\cdot d\vec{S}=q_f=\int\rho_f(\vec{r})d\vec{r}^{\,3}\\ \varepsilon_0\oint\vec{E}_p\cdot d\vec{S}=q_p=\int\rho_p(\vec{r})d\vec{r}^{\,3}\end{aligned} \qquad (2)$$

则总场与总电荷分布之间亦满足高斯定理：

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oiint (\vec{E}_f + \vec{E}_p) \cdot d\vec{S} = q_f + q_p \tag{3}$$

由于

$$q_P = -\oiint_V \vec{P} \cdot d\vec{S} \tag{4}$$

带入上式可得

$$\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_f \tag{5}$$

如果定义一个新的辅助物理量：电位移矢量

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \tag{6}$$

则，其满足的高斯定理为

$$\boxed{\oiint \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = q_f} \tag{7}$$

在介质中辅助矢量 $\vec{D}(\vec{r})$ 满足的高斯定理与在没有电介质的情况下源电场 $\vec{E}_f(\vec{r})$ 满足的高斯定理一致！

$$\oiint \vec{E}_f \cdot d\vec{S} = \frac{q_f}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

这就是我们引入辅助矢量 $\vec{D}(\vec{r})$ 的好处！！ 求解辅助矢量 $\vec{D}(\vec{r})$ 时只要知道 q_f，不要求知道极化电荷的情况。

对于线性介质

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}) \tag{9}$$

因此，电位移矢量为：

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{10}$$

其中，

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{11}$$

为介质中的介电常数，而

$$\varepsilon_r = \chi + 1 \tag{12}$$

是个无量纲的比例常数，称作相对介电常数。为了看清楚（11）-（12）的物理意义，将（10）式代入（7）式可得

$$\boxed{\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}=\frac{q_f}{\varepsilon}} \tag{13}$$

将（13）与（8）比较，可知：在一块均匀的线性介质中放置一个电荷q_f产生的电场就等于其在真空中产生的电场，只要将真空介电常数ε_0代换为介质中的介电常数ε --- 这就是我们定义介电常数ε的原因。

几点讨论：

1） 电场的来源是电荷，不论是自由电荷还是极化电荷。

2） 无论什么介质，（7）式总是正确的。但只有对线性介质，才可以利用$\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$对（7）做进一步简化。

3）$\vec{D}$是一个辅助矢量，并非我们真实面对的电场（以及产生的电场力），后者只能由真实电场$\vec{E}$决定！$\vec{D}$有一些“象”源电荷产生的电场$\vec{E}_f$，但并非万全一样！

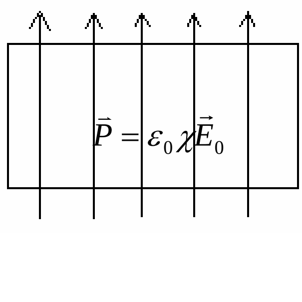
思考：为什么？

4）这里电场$\vec{E}(\vec{r})$为总电场，或是局域场，包含了源电荷和极化电荷的贡献）。

当介质中不存在极化$\chi=0$，$\varepsilon_r=\chi+1=1$，如真空，或空气。极化的程度越大，则介电常数越大。 亦可明白为什么我们要按照（9）式$\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0\chi\vec{E}(\vec{r})$得方式来定义极化率，而不是利用$\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0\chi\vec{E}_f(\vec{r})$来定义$\chi$。 一方面的原因是物理意义清楚 --- 极化当然正比于此地所受到的电场，而非源场； 另一方面此定义直接导致清晰简洁的物理结果。

（五）极化的完整图像

下面我们将具体讨论如何计算介质中的电场，得到极化的一个完整的图像及计算方法。介质放在由无穷远处的源电荷激发的电场中



到此极化现象结束了吗？不

完整的图像为：

电场将介质极化，介质极化后产生极化电荷，极化电荷产生极化电场从而与“源”电场叠加改变总电场，总电场的改变又导致了对介质的极化的改变。如此往返不已… 。 用图形表示为

$$\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}_0 \Rightarrow q_p \Rightarrow \vec{E}_p \Rightarrow \vec{P}=\varepsilon_0\chi(\vec{E}_0+\vec{E}_p)$$

自恰

这里，通常 $\vec{E}_p$ 又称为“退”极化场（Depolarization Field），因为 $\vec{E}_p // -\vec{E}_0$，它的存在总是使得极化变弱。

（1） 初等法

	$E_{总}$	$\vec{P}$	σ_p	$\vec{E}_p$
	E_0	$\varepsilon_0\chi E_0$	$\varepsilon_0\chi E_0$	$-P/\varepsilon_0=-\chi E_0$
	$E_0(1-\chi)$	$\varepsilon_0\chi(1-\chi)E_0$	$\chi(1-\chi)E_0$	$-\chi(1-\chi)E_0$
	$E_0(1-\chi+\chi^2)$	$\chi(1-\chi+\chi^2)\ \varepsilon_0 E$	$\chi(1-\chi+\chi^2)\ \varepsilon_0 E_0$	$-\chi(1-\chi+\chi^2)\ E_0$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

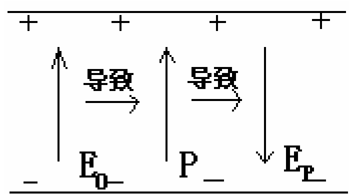
$$E^{(\mathrm{N})}{}_{总}=(1-\chi+\chi^2-\chi^3+\cdots+(-\chi)^{N-1})E_0-\chi E^{(\mathrm{N})}{}_{总}$$

$N\to\infty$ 时， $$E_{总}=\sum_{i=1}^{\infty}(-\chi)^{i-1}E_0=\frac{1-(-\chi)^{\infty}}{1+\chi}E_0=\frac{1}{1+\chi}E_0=\frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad (\chi<1)$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\frac{\chi}{1+\chi}\varepsilon_0\vec{E}_0$$

$$E_p=-\frac{P}{\varepsilon_0}=-\frac{\chi}{1+\chi}E_0$$

$$\sigma_p=P$$



极化对电场的影响

（2） 上述方法虽然物理图像清晰，但受限于$\chi<1$的要求。下面介绍另一方法：自恰方法

$$\vec{E}_T=\vec{E}_0+\vec{E}_p$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}_T$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_p = P=\chi\varepsilon_0 E_T$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{E}_p = -\frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = -\chi\vec{E}_T$$

$$E_T=E_0+E_0 = E_0 - \chi E_T \quad \text{（自洽方程）}$$

$$E_T(1+\chi)=E_0 \quad\Rightarrow\quad E_T=\frac{E_0}{1+\chi}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}_T=\frac{\chi}{1+\chi}\varepsilon_0\vec{E}_0$$

$$\vec{E}_T=\frac{\vec{E}_0}{1+\chi}=\frac{1+\chi-\chi}{1+\chi}\vec{E}_0=\vec{E}_0-\frac{\chi}{1+\chi}\vec{E}_0$$

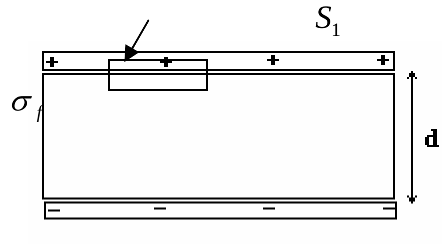
后一项为退极场，是由极化的偶极子产生的场，此场“退”掉一些原来的E_0

6．利用介质中的高斯定理求解

例 1. 两平行金属板，面电荷密度分别为σ_f、$-\sigma_f$，中间夹有极化率为χ的电介质, 求空间的电场电荷分布。

解：（1）由介质中的高斯定理

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{s}=q_f$$



其中q_f为自由电荷；$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$

如图所示做高斯面S_1，则由高斯定理可得

$$-D_1S+D_2S=q_f=\sigma_f\cdot S$$

其中，D_1为金属板中的电位移矢量，D_2为介质板中的电位移矢量，方向均指向下。S为高斯面的截面积，σ_f为金属板上的自由电荷面分布。

根据金属中的静电平衡条件可知

$$E_1=0 \qquad D_1=\varepsilon_0E_1+P_1=0$$

则，

$$D_2=\varepsilon_0E_2+P_2=\varepsilon_0(1+\chi)E_2=\sigma_f$$

$$E_2=\frac{1}{1+\chi}\frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}=\frac{1}{1+\chi}E_0 \qquad (\because E_0=\frac{\sigma_f}{\varepsilon_0})$$

（2）利用D矢量的缺点是计算中完全“忘记”了极化的存在（藏在高斯定理中了）。极化电荷有吗？有！介质的极化强度为

$$P_2=\varepsilon_0\chi E_2=\frac{\chi}{1+\chi}\varepsilon_0\frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}=\frac{\chi}{1+\chi}\sigma_f$$

则由

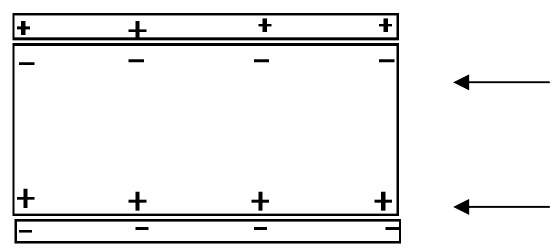
$$\oint_V\vec{P}\cdot d\vec{S}=-q_p$$

在同一个高斯面上计算可得极化电荷分布（注意到金属中$\vec{P}\equiv 0$）：

$$-P_1S+P_2S=-\sigma_p\cdot S$$

$$\sigma_p=-P_2=-\frac{\chi}{1+\chi}\sigma_f$$

σ_f



σ_p

$-\sigma_p$

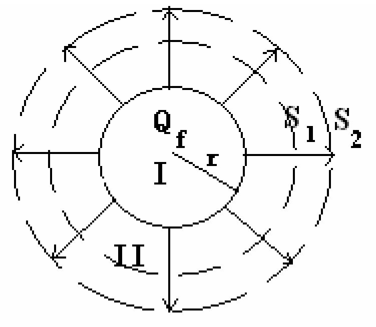
$-\sigma_f$

真实的图像如上图所示。 注意：极化电荷不会与自由电荷中和，它们之间还有

很大空隙（而且极化电荷不能脱离介质而跑到金属上去！）。

例 2. 一个半径为 R 的带电导体球放在极化率为 χ 的介质中，求空间的电场及电荷分布。

解：将空间分出球内和球外两个区域，分别求解。



(1) I 区 $D=\varepsilon_0 E+P=0$ 因为在导体内部；

II 区 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$

因为在线性介质内

由介质中的高斯定理

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}=q_f$$

II 区 $D\cdot 4\pi r^2=Q_f$

$$\vec{D}(\vec{r})=\frac{Q_f}{4\pi r^2}\hat{e}_r \qquad \vec{E}(\vec{r})=\frac{\vec{D}(\vec{r})}{\varepsilon_0(1+\chi)}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0(1+\chi)r^2}\hat{e}_r=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r$$

(2) 极化电荷？

I 区 $\vec{P}=0$

II 区 $\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0\chi\vec{E}(\vec{r})=\frac{\chi}{1+\chi}\frac{Q_f}{4\pi r^2}\hat{e}_r$

我们讲过均匀极化时没有 Q_p，现在极化强度是 r 的函数，有无极化电荷？

将公式

$$\oint_V \vec{P}\cdot d\vec{S}=-Q_p$$

应用一个由半径 r_1 和半径 r_2（$r_1<r_2$）的球面组成的高斯面上，得

$$P(r_2)S_2-P(r_1)S_1=-Q_p$$

然而

$$\left[\frac{Q_f}{4\pi r_2^{\,2}}4\pi r_2^{\,2}-\frac{Q_f}{4\pi r_1^{\,2}}4\pi r_1^{\,2}\right]\frac{\chi}{1+\chi}=0$$

故体内仍没有极化电荷！

将公式

$$\oint_V \vec{P}\cdot d\vec{S}=-Q_p$$

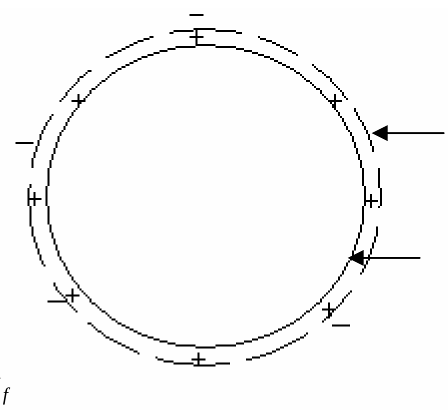
用到 $r_1<R, r_2=R$ 的一个高斯面上，注意到金属中（$r_1<R$）的 P 为 0，得

$$P \cdot 4\pi R^2 = -Q_p$$

$$\frac{Q_f}{4\pi R^2}\frac{\chi}{1+\chi}4\pi R^2 = -Q_p$$

$$Q_p = -\frac{\chi}{1+\chi}Q_f$$

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{4\pi R^2} = -\frac{\chi}{1+\chi}\frac{Q_f}{4\pi R^2} = -\frac{\chi}{1+\chi}\sigma_f$$



介质与球的交界面出现极化电荷，反号的极化电荷将“屏蔽”原自由电荷的电场，使得空间的电场与原来相比小$\varepsilon_r = 1+\chi$倍。

习题

1） 半径为 R，相对介电常数为ε_r的均匀电介质球的中心放置一点电荷 q，试求：

（1）球内外的电场强度 E 和电势φ的分布；

（2）如果要使球外的场强为零而球内的场强保持不变，应怎么办？

2）一半径为a的导体球被内半径为b的同心导体球壳所包围。两球间充满各向同性的电介质，在离球心为r处介质的相对介电常数$\varepsilon_r = (A+r)/r$（A为常数）。如果内球带电荷Q，外球壳接地，试求：

（1）在电介质中离球心为r处的电势；

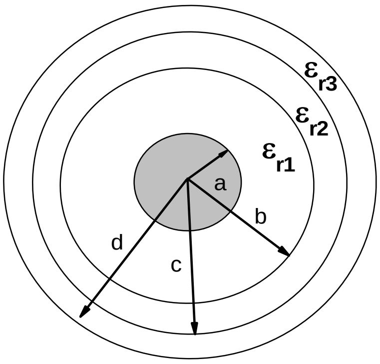
（2）介质表面上的极化电荷面密度和介质中任一点处极化电荷的体密度；

（3）介质中极化电荷的总量。

3）无限长的圆柱形导体，半径为 R，沿轴线单位长度上带电量λ。将此圆柱形导体放在无限大的均匀电介质（ε_r）中。求电介质表面的束缚电荷面密度。

4）为了提高输电电缆的工作电压，在电缆中常常放几种电介质，以减小内、外导体间的电场强度变化，这叫分段绝缘。图中所示是这种电缆的剖面图。若用相对介电常数$\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r3}$的三种电介质作为绝缘物时，设内部导体每单位长度上

带电量为λ。试求：（1）各层内的电场强度；（2）各层电场强度的极大值；（3）在什么条件下，才能使介质内的电场强度保持为常值？



第 4 题图

5）今有 A，B，C 三导体板互相平行地放置，AB，BC 之间的距离均为 d. BC 之间充满相对介电常数为 ε_r 的介质，AB 之间为真空，今使 B 板带电+Q，试求各导体板上的电荷分布。忽略边缘效应。（提示：（1）电荷分布在导体板的表面，因此共有 6 个未知量，需要 6 个独立方程；（2）其中一个方程要利用到无限大均匀面电荷分布的电场形式）