第五讲

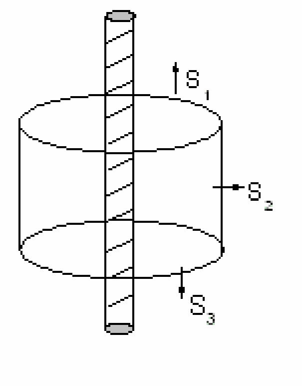
复习：

- 带电体在电场中的运动。偶极子在电场中的运动可以同一用相互作用能 $U(r) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})$ 表示。
- 高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_{i\in S} q_i/\varepsilon_0$

（三）应用举例：

计算带电体的电场可以利用两种办法：1）直接积分，2）高斯定理。前者适用于缺乏明确对称性的有限体系（有限长度的带电棒，有限大小的带电圆盘，等），后者适用于具有明显对称性的结构（通常是无限的）。后面还会学到第三种方法：由电势计算电场。三种方法各有其适用范围，应当多多体会它们的优劣。

1．无限长均匀荷电线



应用 Guass 定理之前，必须仔细分析体系的对称性。本体系具有（1）平移不变性；（2）旋转不变；（3）反演不变，三个对称性质。在柱坐标系中利用上述 3 个对称性考虑电场的方向：

$\vec{E}$ // $\vec{e}_\rho$ $\quad$ $\vec{e}_\phi$ $\quad$ $\vec{e}_z$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

只有它有可能 $\quad$ 倒过来看就可知道 ϕ 方向为 0 $\quad$ 倒过来看就可知道 z 方向为 0

同样分析可知 $\vec{E}$ 的大小只依赖于 ρ 。故，据此可知 $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$

根据对称性，可选择合适的高斯面（如图所示）。由高斯定理：

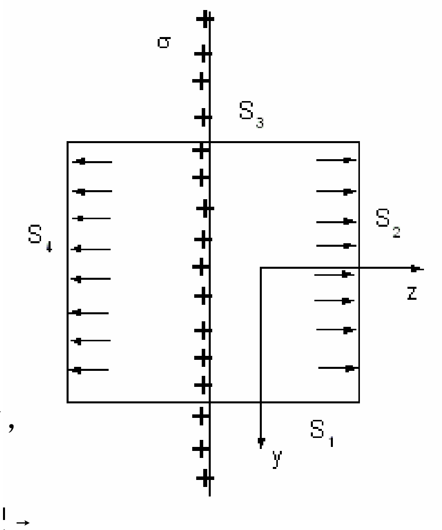
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_3 = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_2$$

$$= E(\rho)\cdot 2\pi\rho h = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \lambda\cdot\frac{h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda h}{2\pi\rho h\varepsilon_0}\vec{e}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$$

思考：若直接积分，可否得到一致的结论？

2. 无限大均匀荷电平板



<u>方向：</u>仍然先分析电场的对称性以确定$\vec{E}$的方向，

$\vec{E}$平行于$\vec{y}$？　　　$\vec{E}$平行于$\vec{x}$？　　　$\vec{E}$平行于$\vec{z}$？

错！　　　　　　　错！　　　　　　　对！

根据对称性，将板绕 z 轴旋转 180 度，所得的体系与原体系一样，场也因此完全一样。若电场有E_y分量，则旋转后的体系具有-E_y分量，故$E_y \equiv 0$。对 x 方向同理可证。

<u>大小</u>：通过对称性分析可知E的<u>大小</u>只依赖与z，而与x,y无关（板为无限大），故，　$\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\hat{z}$。则如图画一个高斯面

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E_1} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$

$$= E(z)(S_1 + S_2) = 2E(z) \cdot S = Q/\varepsilon_0 = \sigma \cdot S/\varepsilon_0$$

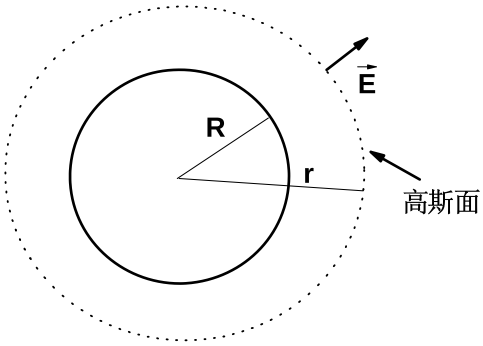
$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

与直接用库仑定律来求解的结果一致（见第 3 讲（26.5.3））。

注意：高斯定理不能告诉我们场的方向，因此根据对称性确定场的方向是非常重要的。

3. 球状对称结构

（1）　壳状：　$Q = \sigma 4\pi r^2$



对称性讨论： $\vec{E} \parallel \hat{e}_r$, $\vec{E} \parallel \hat{e}_\phi$, $\vec{E} \parallel \hat{e}_\theta$

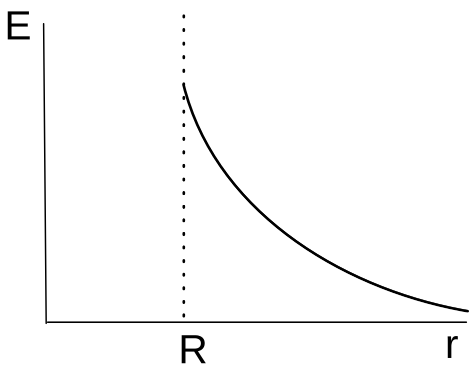
Yes　No 对称性　No 对称性

结论：方向：$\vec{E} \parallel \hat{e}_r$ ， 大小：$E \sim E(r)$，故 $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$

根据对称性分析，画高斯面为半径为 r 的球面，则

$r \geq R$ 时，$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$， $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$，

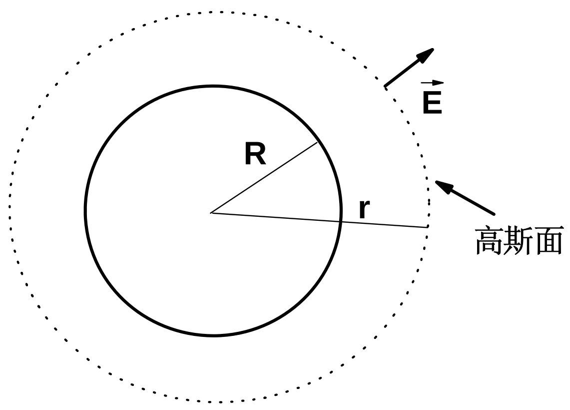
$r \leq R$ 时，$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = 0$， $\vec{E}(\vec{r}) = 0$，



壳状荷电体在远处看与电电荷无异，内场为 0

回想直接积分，何其困难！

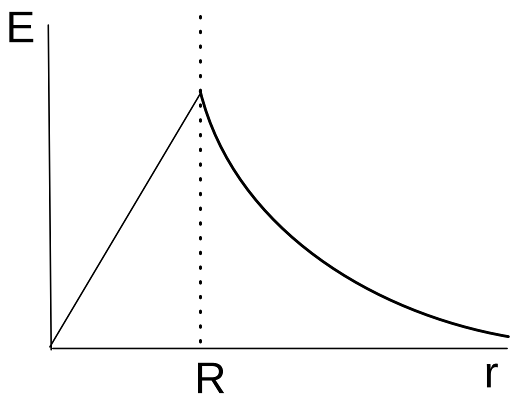
（2） 球状均匀荷电体： $Q = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3$



相同的讨论： $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{e}_r$

$r \geq R$ ： $E(r)\cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$ ， $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$r \leq R$ ： $E(r)\cdot 4\pi r^2 = Q'/\varepsilon_0 = \dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$ $E(r) = \dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$



深入思考下去，可以进一步延伸出许多题目，比如：

（**a**）*若电荷密度* $\rho(r)\propto r$ *，则此荷电球的电场分布？*

（**b**）*若电荷均匀分布在一个厚度为* δ *的薄壳层内，空间的电场分布？*

（**c**）*在* $\delta\to 0$ *条件下，与荷电球壳的结果比较，得出（***b***）中的电荷密度* ρ *与球壳情形中定义的面密度密度* σ *的关系。*

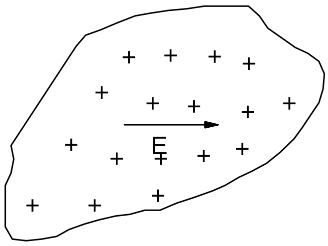
（**d**）*所有讨论对柱状对称体全部重新来一遍。*

等等…

（四）导体中的电场：

导体的特性：有自由电荷，可以自由移动。与绝缘体不同，我们不能预设其电荷分布（就象我们前面所遇到的）。其电荷分布为未知量！

我们的目的： 任意形状的导体的静电平衡时的电荷分布及相应的电场（$\rho(\vec{r},t)$ 及 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 不随时间变化）



（1） 假设 $t=0$ 时， 导体内部有自由电荷，则导体内部电场非 0：

因有内场，电荷受力，做加速运动，因此体系没有达到静电平衡

电荷受力运动，改变电荷分布，产生一个附加场，与原电场方向相反，运动过程使得导体内部的电荷与电场均变小

$$\rho_{in} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_{in}(\vec{r}) \neq 0 \Rightarrow \text{电荷运动 } m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}_{in}(\vec{r})$$

$$\vec{E}_{in} > 0 \Rightarrow +Q \rightarrow +\propto \text{运动} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}' < 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{in} = \left(\vec{E}_{in} + \vec{E}'\right)\downarrow, \quad \rho_{in} = \left(\rho_{in} + \rho'\right)\downarrow$$

静电平衡性质 I

$\boxed{\text{导体内部没有自由电荷，没有静电场 } \vec{E}_{in}=0 \text{ 及 } \rho_{in}=0}$

深入思考：从上述分析中看平衡时只要求 $\vec{E}_{in}=0$ 或 $\rho_{in}=0$，为什么最后的结论是 $\vec{E}_{in}=0$ 和 $\rho_{in}=0$ 两个条件必须同时满足？

（2）电荷在表面如何分布？

电荷不能离开导体，但可以在表面自由移动。表面上的电荷的受力方程为：

$$m\dot{\vec v}_{\parallel}=\vec F_{\parallel}=q\vec E_{\parallel}(\vec r)$$ 其中 $\parallel$ 指平行于表面，

$t=0$，表面存在切向电场则电荷受到切向作用力，电荷受力被移动 $\Rightarrow$ 电荷重新分布产生的附加电场与原电场方向必相反，从而使得切向总电场减小。

$$\vec E_{\parallel}\neq 0\Rightarrow \vec F\neq 0\Rightarrow \text{电荷运动}\Rightarrow \sigma(\vec r)\ \text{changes}\ \Rightarrow \vec E_{\parallel}'(\vec r)<0$$

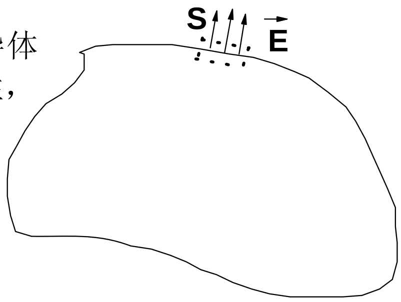
$$\Rightarrow \vec E_{\parallel}=\left(\vec E_{\parallel}+\vec E_{\parallel}'\right)\downarrow$$

$t=\infty$，静电平衡，满足

II $\boxed{\text{导体表面电场没有平行分量}\quad \vec E_{\parallel}(\vec r)=0}$

（3）导体表面的电场：

取高斯面为如图所示的上下表面为 S 平行于导体表面的柱体，根据导体静电平衡时的三大特性，容易算出高斯面积分为：



$$\oiint \vec E\cdot d\vec s=S\cdot E_{\perp}(\vec r)=q\big/\varepsilon_0=\sigma(\vec r)S\big/\varepsilon_0$$

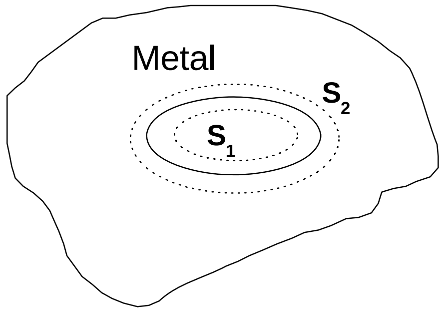
所以：$E_{\perp}(\vec r)=\dfrac{\sigma(\vec r)}{\varepsilon_0}$

III $\boxed{\text{导体表面只有垂直电场}\ E_{\perp}(\vec r)=\dfrac{\sigma(\vec r)}{\varepsilon_0}}$

注意：导体表面的电荷分布 $\sigma(\vec r)$ 是个未知量！这一点非常重要！我们前面的课程中，总是对某一假设的电荷分布（比如有限长均匀带电棒）求其产生的空间电场，原则上讲，这些已知的电荷分布只能在绝缘体上实现（因为绝缘体上电荷不能自由运动）。对导体来讲，我们不能预先设置其电荷分布，我们知道的只是前面的三大性质。一旦求得了电荷分布，空间电场也就知道了。这是求解导体带电体的静电问题一定要注意的。

（五）举例

（1）导体空腔



设一个有空腔的导体带有电荷 q, 分两种情况讨论：

（**a**）**空腔内没有电荷**。从导体的基本性质可知，电荷分布在导体表面，设分布在内外表面上的电量分别为 q_{in} 和 q_{out}，则根据电荷受恒，

$$q = q_{out} + q_{in}$$

画高斯面如图所示，则

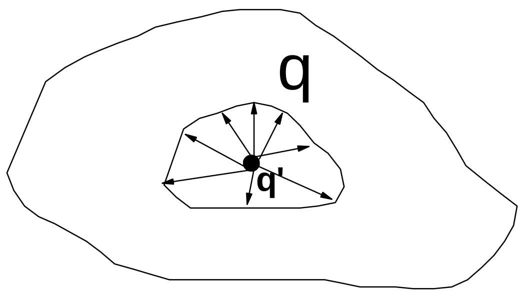
$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \text{（因导体内场 } \vec{E}_{in} \equiv 0 \text{）}$$

因 $\oint \vec{E} \cdot ds = 0 = q_{in}$， <u>则内表面上总电荷 q_{in} **=0**</u>

故 $q_{out} = q$

<u>所有的电荷均分布在导体的外表面</u>。

思考：此处根据高斯定理，只能确定内表面上的总电荷为 0，并不能确定内表面上的任何一点上都没有电荷分布。但实际情况的确是内表面上处处都没有电荷分布，你有无方法证明？



（**b**）**导体空腔有电荷 q'.**

作一样的三个高斯面，则

$$0 = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_{in} + q' \Rightarrow q_{in} = -q'$$

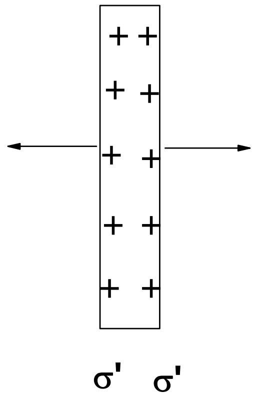
根据电荷守恒

$$q = q_{in} + q_{out} \Rightarrow q_{out} = q - q_{in} = q + q'$$

最后的结果是：导体空腔内表面感应出等量异号的电荷。

思考：根据以上的两种情况的结果，分析 Franklin 用来证明高斯定理的实验（书上 27-7，图 27-19）。

<u>（2）单个金属薄板</u>



导体表面的电场为: $E = \sigma / \varepsilon_0$

但一层均匀分布的面电荷 $E = \sigma / 2\varepsilon_0$，若有一带电金属薄板，其电场应当为什么？如何统一？

仔细观察一个带电金属薄板，根据金属带电体的三个基本性质（只能表面带电，内场为 0，表面只有垂直场）及对称性，可知

两表面各有均匀面电荷分布，设密度为 σ'。利用导体表面电场与导体表面面电荷密度的关系，得

$$E = \sigma' / \varepsilon_0$$

另一方面，若将薄板看成一个整体，此时的电荷面密度应定义为

$$\sigma = 2\sigma'$$

利用无限大均匀带电平面的电场表达式，得

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

得到一致的结果。两个公式都对，但面密度的定义不同。

σ' 为真实的金属表面电荷密度，
σ 为假设金属板非常薄时此板整体的一个面电荷密度。

习题：**P. 627 Questions：6，8，12，30**
P. 631 Problems: 4, 6