第四讲

复习：

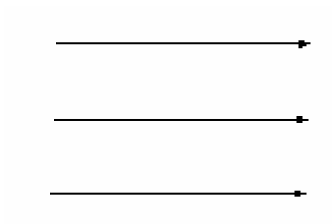
- 利用$\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$来计算环、盘状荷电体的电场，但是这只能用来计算高对称性点的电场。任意情况？计算机数值计算！
- 无限大平面荷电体的电场：$\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{Z}{|Z|}$ ，它是均匀电场。
- 球、球壳状荷电体的电场—球外为点电荷电场，球内为 0（计算繁复）！
- 偶极子：定义$\vec{P}=q\vec{l}$，电场$E_{\vec{P}}\propto\dfrac{1}{r^3}$
- 电力线：定义---$\vec{E}$平行于电力线切向，$|\vec{E}|$正比于电力线的密度

  性质--- 电力线是连续的，始于正电荷终于负电荷（或无穷远）

  <u>**画电力线有助于形象地理解电场的行为（更多例子及演示实验）**</u>

****

<u>（七）带电体在电场中的运动</u>



1. 点电荷在均匀电场中的运动

场强 $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}$ ，电荷q ，质量 m

点电荷受力：$\vec{F}=q\vec{E}$

加速度 $\vec{a}=\vec{F}/m=\dfrac{q}{m}\vec{E}$ （看一个演示实验。问：原理？）

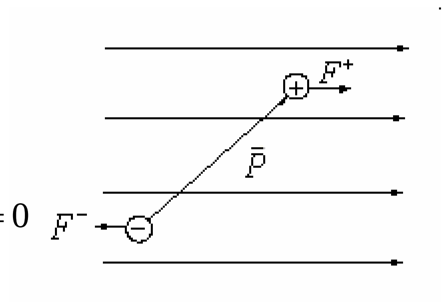
这方面大家在中学期间已有了很好的训练，这里不再赘述。

2. 偶极子在均匀电场中

$-q$电荷的受力： $\vec{F}_-=-q\vec{E}$

$+q$电荷的受力： $\vec{F}_+=q\vec{E}$

偶极子总的受力：$\vec{F}_{总}=\vec{F}_-+\vec{F}_+=0$



难道 dipole 不运动？

原来这只是质心不动而已！Dipole 受到一个使它转动的作用，即力矩。

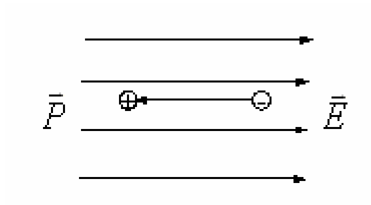
它所受的力矩是：

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \overrightarrow{r_-} \times \overrightarrow{F_-} + \overrightarrow{r_+} \times \overrightarrow{F_+} = q\vec{r}_+ \times \vec{E} - q\vec{r}_- \times \vec{E} \\ &= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned} \quad (26.7.1)$$

力矩的大小为

$$|\tau| = PE\sin\theta$$

力矩的方向指向里面



$\vec{P} // \vec{E}$ 或 $\vec{P} // -\vec{E}$ 时，$\vec{\tau} = 0$ ，不受力矩，但平衡与否？

$\vec{P} // \vec{E}$ 时是稳定的， 可看成是负反馈

$\vec{P} // -\vec{E}$ 时是不稳定的，可看成是正反馈

事实上，与物体在重力场中具有势能类似，$\vec{P}$ 与电场的相互作用可以用<u>相互作用能</u>（电势能）描述。设想 $\vec{P}$ 在电场的作用下从 θ_0 转到了 θ，在此过程中，电场对 $\vec{P}$ 做的功为

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\theta_0}^{\theta} pE\sin\theta \cdot d\theta = pE\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \quad (26.7.2)$$

这里负号的来源是 $\vec{\tau}$ 的方向与 θ 增加的方向相反。

$\vec{P}$ 受到电场力的做功，机械能将增加

$$\Delta K = W \quad (26.7.3)$$

根据能量守恒，这部分机械能的增加一定是其他能量转化而来的。在这个转动过程中，哪些能量发生了变化？

外电场的能量？---- No！ （外电场根本没发生变化！）

$\vec{P}$ 自己带有的能量？--- No！（它只是发生了转动，转一个坐标系来看不变！）

只有 $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的<u>相互作用能</u>发生了变化！（相对位置或方向发生了变化）

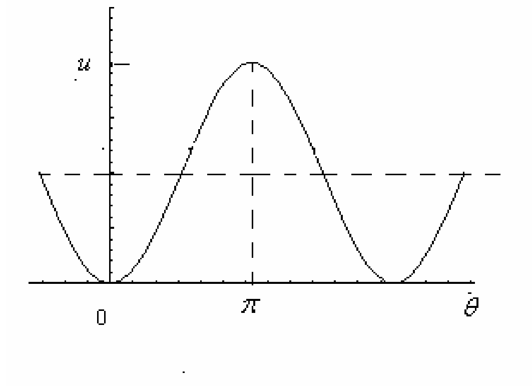
$$\Delta U = -\Delta K = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

选取合适的能量零点（如 $\theta_0 = \pi/2$），我们得到 $\vec{P}$ 与电场的<u>相互作用能</u>为

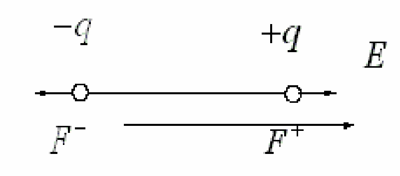
$$\boxed{U = -pE\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}} \quad (26.7.4)$$

当 $\theta=0$ 时，是稳定平衡

当 $\theta=\pi$ 时，是不稳定平衡



3. 偶极子在非均匀电场中



(1) 在非均匀 $\vec{E}$ 中 dipole 的质心仍不受力吗？

在非均匀电场中，简单起见，考虑 当 $\vec{P}//\vec{E}$ 时，偶极子的受力：

$$F=[E(x_+)-E(x_-)]q=\frac{\partial E}{\partial x}lq=\frac{\partial E}{\partial x}P$$

由于 $\frac{\partial E}{\partial x}\neq 0$ ，所以 $F\neq 0$ （受力方向指向电场增加的方向）

（2）转动

虽然前面我们对转动的描述是在均匀电场下得到的结果，对于偶极子很小时（即 $l<<$ 非均匀尺度时），结论仍然正确：

$$\vec{\tau}(\vec{r})=\vec{P}\times\vec{E}(\vec{r})$$

只不过此处电场应取此地的局域电场值。

综合起来，偶极子在任意电场中的行为可与用偶极子与电场的相互作用能来统一描述：

$$\boxed{U(\vec{r})=-\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})}$$

非均匀电场中 $\vec{P}$ 受力：<u>向着电场增加的方向运动</u>

所受力矩：<u>倾向平行于电场</u>

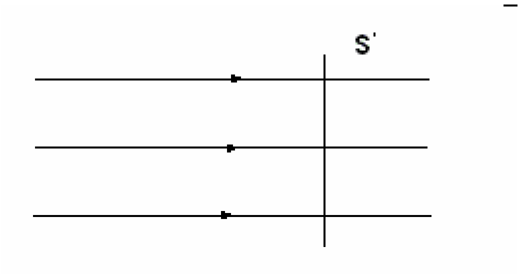
从相互作用能极小的角度来理解可以得到一致的结论！

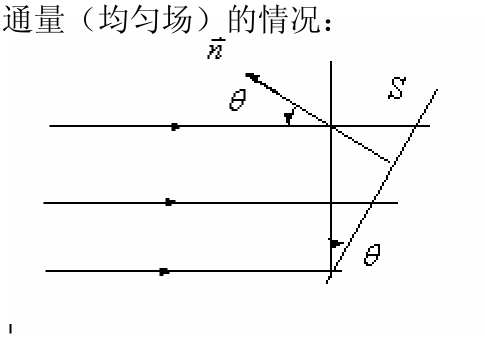
第 27 章：高斯定理

为什么引入高斯定理？看看即使是高对称性体系如球，从库仑定律出发来求 $\vec{E}$ 也很困难（计算繁琐）。

（一）电通量

先来看一下电通量，我们可以类比水通量（均匀场）的情况：



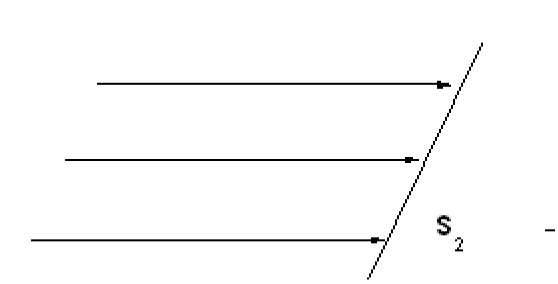


单位时间水通过 S' 的量—— $\rho v S'$　　　　$\rho v S' = \rho v S\cos\theta = \rho\vec{v}\cdot\vec{S}$

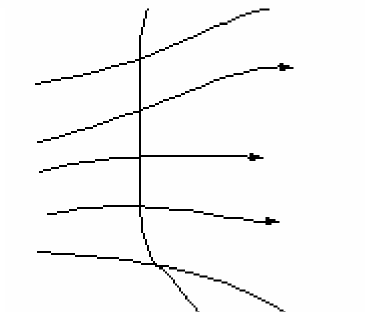
<u>定义电通量为</u>：　　$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S}$

$$\Phi_1 = ES_1$$

$$\Phi_2 = \vec{E}\cdot\overrightarrow{S_2} \qquad \Phi_1 = \Phi_2$$



非均匀电场 ，　　S 为任意曲面



$\Delta S(\vec{r})$ 处 $\vec{E}$ 可以近似为均匀

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{S}(\vec{r})$$

$$\Phi = \sum\Delta\Phi = \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{S}(\vec{r}_i) = \int\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

本质上，Φ 的物理意义就是一个任意截面通过的电力线数！

（二）高斯定理

对于闭合曲面　$\oint\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = ?$

我们先来看点电荷的情况： $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e_r}$

① <u>包含电荷的闭合曲面</u>

若曲面为一个处于球心的球面，当然容易求出

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2=q/\varepsilon_0$$

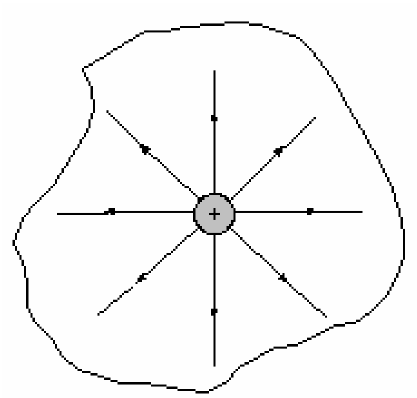
曲面为任意形状呢？

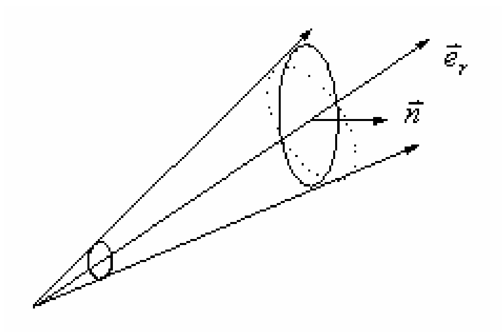
将曲面分成许多小块，让我们看其中一块的贡献

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\Delta S'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot r^2\cdot\Delta\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega$$

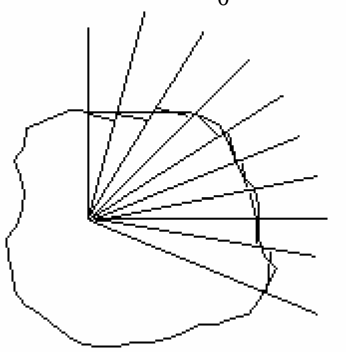
这里$\Delta\vec{S}$为这一小块面积元（方向垂直指向外），$\Delta S'$为$\Delta\vec{S}$投影到电场方向的面积元，$\Delta\Omega=\dfrac{\Delta S'}{r^2}$为立体角。





将所有面积元的贡献相加，得积分：

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}_{'}=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



<u>即：任意形状的包含一个电荷的闭合曲面上的电通量的总和正比于曲面内部包含的电量</u>

这可看出平方反比的重要性!!　　$\Delta S^{'} = \Delta\Omega \cdot r^2$

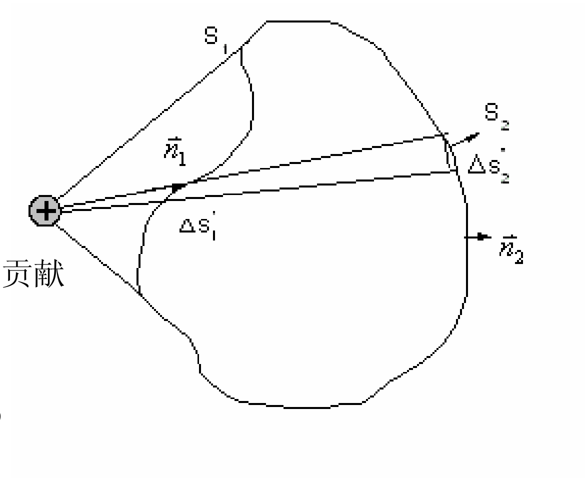
若这里不是r^2，而是r^3, r^1 ，这样都没有 Guass 定理。

② 闭合曲面内不包含电荷

仍然将曲面分成许多小块，任意一个面积元$\Delta\vec{S}_2$，总有与之相对的面积元$\Delta\vec{S}_1$。因此，曲面对电通量的总贡献为

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^1 + \sum_{j=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_j)\cdot \Delta\vec{S}_j$$



然而，注意到$\Delta\vec{S}_2$与$\Delta\vec{S}_1$的方向相反，同时贡献大小相同，即

$$\vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^1 = E(\vec{r}_i)\cdot \Delta S_i^1 = -\Delta\Omega$$

$$\vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^2 = \Delta\Omega$$

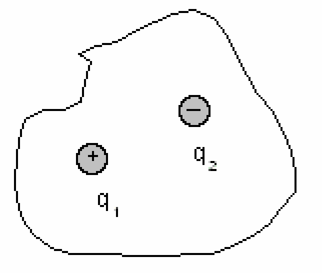
它们对总结果的贡献严格的相互抵消

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^1 - \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^2) = 0$$

<u>即：不包含电荷的闭合曲面的电通量总和为 0！</u>

③ 线性叠加原理

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S} + \cdots = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$



这是高斯定理的最终形式。

注意：**1**）高斯定理讲述的是场的积分效应，与具体电场的局域数值无关！

2）尽管高斯曲面积分的终值只与曲面内部的电量有关，与曲面外部的电荷无关，电场在曲面上的局域数值与有无电荷在曲面外有关。

高斯定理　$\Rightarrow$　库仑定律

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

根据对称性 $\vec{E} \sim \vec{e}_r$ ，切向取高斯曲面为一半径 r 的球，

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

这里必须假设电场为径向，才能推出库仑定律。若没有这个假设，我们可以得出其他电场的形式也满足高斯定理。因此，库仑定律比高斯定理更本质，包含了更多的物理内容！从数学上讲，高斯定理讲述的是空间场的散度性质，只有散度性质是不能唯一确定场的全部信息的，我们还必须知道场的旋度性质。

习题：**P.605, Questions: 23,30**

P.610, Problems: 10, 12, 14.