高维微分学——曲线向量值映照

复旦力学　谢锡麟

2016 年 3 月 15 日

1　知识要素

1.1　曲线的切向量与切线

定义 1.1 (曲线)**.** 单参数向量值映照即可称为**曲线**

$$\boldsymbol{r}(t):\mathbb{R}\supset[\alpha,\beta]\ni t\mapsto\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}X^1(t)\\ \vdots\\ X^m(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m.$$

由于曲线的自变量为实数, 故可研究曲线相对于其自变量/单参数的变化率, 可称为**切向量**, 具体定义如下

定义 1.2 (曲线的切向量)**.**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)\triangleq\begin{cases}\displaystyle\lim_{t\to t_0\in\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}\\ \displaystyle\lim_{\Delta t\to 0\in\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\end{cases},$$

按复合向量值映照的极限定理可知上述二个极限等价.

性质 1.1. 如有曲线 $\boldsymbol{r}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在 t_0 点可微, 则存在 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}(t_0)\in\mathbb{R}^m$.

证明 如有曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点可微, 即有

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}(t_0)\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t)\in\mathbb{R}^m,$$

式中 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}(t_0)=\begin{pmatrix}\dot{X}^1 & \cdots & \dot{X}^m\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点的 Jacobi 矩阵. □

需指出, 如果曲线在某点存在切向量也即为曲线在该点可微.

定义 1.3 (曲线的切线)**.** 如果存在曲线 $\boldsymbol{r}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在 t_0 点的切向量 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$, 则可定义曲线在改点的**切线**

$$\boldsymbol{l}(t):\mathbb{R}\ni t\mapsto\boldsymbol{l}(t)\triangleq\boldsymbol{r}(t_0)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)\in\mathbb{R}^m.$$

可见, 在 t_0 邻近, 曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 同其切线 $\boldsymbol{l}(t)$ 的 “差别” 为 $\boldsymbol{o}(t-t_0)$.

微积分讲稿 谢锡麟

1.2 曲线的局部标架及其运动方程

1.2.1 以弧长为参数的 Frenet 标架及其运动方程

引理 1.2. 如果向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的模保持不变, 则有 $\dot{\boldsymbol{A}}(t)\perp\boldsymbol{A}(t)$.

证明 向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的模保持不变, 即有 $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{A}(t)|^2_{\mathbb{R}^m}}{\mathrm{d}t}=0$, 所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{A}(t)|^2_{\mathbb{R}^m}=2\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t),\boldsymbol{A}(t)\right)_{\mathbb{R}^m}=0,$$

所以 $\left(\dot{\boldsymbol{A}}(t),\boldsymbol{A}(t)\right)_{\mathbb{R}^m}=0$, 即 $\dot{\boldsymbol{A}}(t)\perp\boldsymbol{A}(t)$. □

Frenet 标架是定义在 $\mathbb{R}^3$ 空间中的曲线上的标架, 此时将曲线上点的坐标记作 $\boldsymbol{r}$ 以示区分. 在定义了曲线的弧长之后, 曲线上的每一点都对应一个特定的弧长值, 即

$$s(t)=\int_\alpha^t\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right|_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\xi.$$

在本章中, 若无特殊说明, 使用 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 表示 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, 而使用 $\boldsymbol{r}'$ 表示 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$. 首先, 有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^3}=|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3},$$

令

$$\boldsymbol{\tau}(s)=\boldsymbol{r}'(s),$$

称为**切向量**. 它满足 $\boldsymbol{\tau}(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}$, 所以 $|\boldsymbol{\tau}(s)|_{\mathbb{R}^3}=1$.

根据引理1.2, 可得 $\boldsymbol{\tau}'(s)\perp\boldsymbol{\tau}(s)$. 于是令

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{\boldsymbol{\tau}'(s)}{|\boldsymbol{\tau}'(s)|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}},$$

称为**主法向量**. 显然 $|\boldsymbol{n}(s)|_{\mathbb{R}^3}=1$.

令

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{\tau}(s)\times\boldsymbol{n}(s)=\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}},$$

称为**副法向量**. 显然有 $|\boldsymbol{b}(s)|_{\mathbb{R}^3}=1$, 而且 $\boldsymbol{b}(s)\perp\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)\perp\boldsymbol{n}(s)$.

综上, 曲线每一点上的切向量、法向量以及副法向量可以构成曲线在该点的一个局部标架 (local frame)：

1. **切向量**：$\boldsymbol{\tau}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$;
2. **主法向量**：$\boldsymbol{n}(s)=\dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}}$;
3. **副法向量**：$\boldsymbol{b}(s)=\dfrac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}}$.

微积分讲稿 谢锡麟

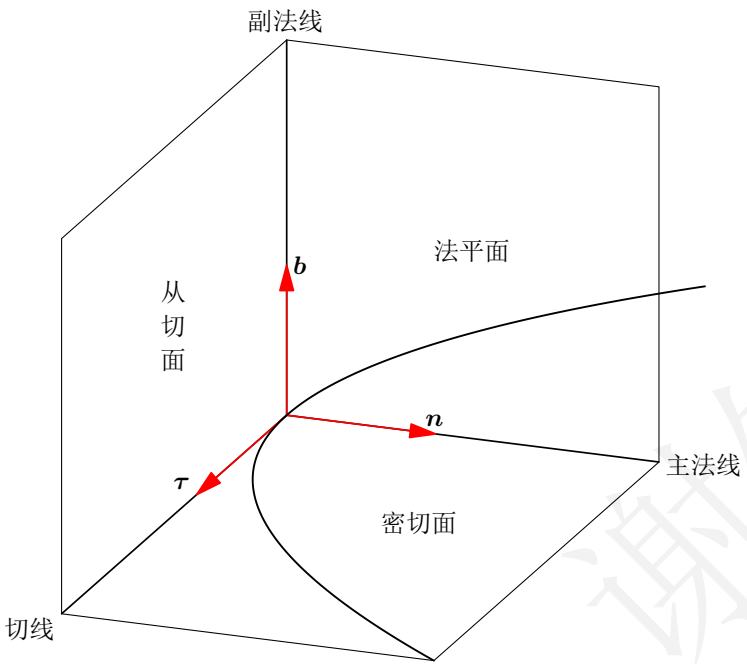

图 1: Frenet 标架示意

显然, Frenet 标架 (见图1) 是一个正交规范标架. 藉此, 在曲线上运动的质点, 当其运动到某点时, 定义在其上的向量 (如速度、加速度等) 都可以基于当地的 Frenet 标架展开, 亦即将某向量表示成切向量、法向量以及副法向量的线性组合. 以此, 可作为进一步的解析基础.

由于 Frenet 标架是局部的, 一般沿着曲线而变化, 因此需要研究局部标架随曲线弧长的变化率. 为此, 先引入以下的定理.

定理 1.3 (标架运动方程)**.** 正交规范标架 $\{\boldsymbol{\omega}_1(t), \boldsymbol{\omega}_2(t), \boldsymbol{\omega}_3(t)\}$ 随变量 t 而变化, 其变化率可以通过系数矩阵 $\left(\Omega_{ij}\right)$ 来表示:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1(t) & \dot{\boldsymbol{\omega}}_2(t) & \dot{\boldsymbol{\omega}}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_1(t) & \boldsymbol{\omega}_2(t) & \boldsymbol{\omega}_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix}.$$

上述方程称为**标架运动方程**, $\left(\Omega_{ij}\right)$ 是反对称矩阵, 亦即 $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$.

证明 由于

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{p=1}^{3} \Omega_{pi} \boldsymbol{\omega}_p\,, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \sum_{q=1}^{3} \Omega_{qj} \boldsymbol{\omega}_q,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_j)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{\omega}_j + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_j}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{p=1}^{3} \Omega_{pi} \boldsymbol{\omega}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_j + \sum_{q=1}^{3} \Omega_{qj} \boldsymbol{\omega}_q \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{p=1}^{3} \Omega_{pi} \delta_{pj} + \sum_{q=1}^{3} \Omega_{qj} \delta_{qi} \\ &= \Omega_{ji} + \Omega_{ij} = 0. \end{aligned}$$

□

基于上述定理, Frenet 标架的标架运动方程可以表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}'(s) & \boldsymbol{n}'(s) & \boldsymbol{b}'(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}(s) & \boldsymbol{n}(s) & \boldsymbol{b}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\Omega_{12} & -\Omega_{13}\\ \Omega_{12} & 0 & -\Omega_{23}\\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\tau}'(s) = \boldsymbol{r}''(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{n}(s)$, 所以有

$$\Omega_{12} = |\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}, \quad \Omega_{13} = 0.$$

令 $\kappa(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}$ 称为曲线该点处的**曲率**. 再引入**挠率**满足

$$\boldsymbol{b}'(s) = -\sigma(s)\boldsymbol{n}(s),$$

因此有 $\Omega_{23} = \sigma(s)$. 挠率 $\sigma(s)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= -\left(\boldsymbol{b}'(s), \boldsymbol{n}(s)\right)_{\mathbb{R}^3} = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right), \frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\\
&= -\frac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left(\boldsymbol{r}''(s)\times\boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}''(s)\right)_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s), \boldsymbol{r}''(s)\right)_{\mathbb{R}^3}\\
&\quad + \frac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|^3_{\mathbb{R}^3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}\left(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}''(s)\right)_{\mathbb{R}^3}\\
&= -\frac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s), \boldsymbol{r}''(s)\right)_{\mathbb{R}^3}\\
&= \frac{[\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s)]_{\mathbb{R}^3}}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}.\end{aligned}$$

综上, 以弧长为参数的 Frenet 标架的运动方程可以表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}'(s) & \boldsymbol{n}'(s) & \boldsymbol{b}'(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}(s) & \boldsymbol{n}(s) & \boldsymbol{b}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s) & 0\\ \kappa(s) & 0 & -\sigma(s)\\ 0 & \sigma(s) & 0\end{pmatrix},$$

式中曲率 $\kappa(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}$, 挠率 $\sigma(s) = \dfrac{[\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s)]_{\mathbb{R}^3}}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}$.

1.2.2 一般形式的 Frenet 标架及其运动方程

设一般形式下的轨迹可以表示为 $\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(s(t))$, 在不引起混淆的情况下, 可以简单地将 $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$ 记作 $\boldsymbol{r}(t)$.

在这种情况下, 切向量可以表示为

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}(s(t)) = \boldsymbol{r}'(s(t)) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}},$$

主法向量 $\boldsymbol{n}(s) = \dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^3}}$, 因此首先计算

$$\boldsymbol{r}''(s(t)) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3_{\mathbb{R}^3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}.$$

将式 $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2=(\dot{\boldsymbol{r}}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t))_{\mathbb{R}^3}$ 的两端求对 t 的导数得

$$2|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}=2\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)_{\mathbb{R}^3},$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)_{\mathbb{R}^3},$$

此时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''(s(t))&=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}-\frac{(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t))_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}\dot{\boldsymbol{r}}(t)\\&=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t)-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right].\end{aligned}$$

根据内蕴正交分解, 对于向量 $\boldsymbol{T}$, 有

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T},\boldsymbol{e})_{\mathbb{R}^3}\,\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{T}).$$

令 $\boldsymbol{T}=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, $\boldsymbol{e}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}$ 可得

$$\boldsymbol{r}''(s(t))=-\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\right)=-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}.$$

因此主法向量为

$$\boldsymbol{n}(t)=\frac{\boldsymbol{r}''(s(t))}{|\boldsymbol{r}''(s(t))|_{\mathbb{R}^3}}=-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))|_{\mathbb{R}^3}}=-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}.$$

此时曲率可以表示为

$$\kappa(t)=|\boldsymbol{r}''(s(t))|_{\mathbb{R}^3}=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}.$$

副法向量即为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}(t)&=\boldsymbol{\tau}(t)\times\boldsymbol{n}(t)\\&=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t)-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}.\end{aligned}$$

挠率为

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{b}(s(t)),\boldsymbol{n}(t)\right)_{\mathbb{R}^3}=-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s),\boldsymbol{n}(t)\right)_{\mathbb{R}^3}\\&=-\left(\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}},-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\\&=\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}},\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\\&=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\left(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(t),\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\right)_{\mathbb{R}^3}\\&=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\left(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(t),-\ddot{\boldsymbol{r}}(t)+\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3}\\&=-\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2}\left(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(t),\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\right)_{\mathbb{R}^3}=\frac{[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\dddot{\boldsymbol{r}}(t)]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2},\end{aligned}$$

式中倒数第二行使用了向量的内蕴正交分解.

综上所述, 一般形式的 Frenet 标架可以表示为

1. **切向量**：$\boldsymbol{\tau}(t)=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}$;
2. **主法向量**：$\boldsymbol{n}(t)=-\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}$;
3. **副法向量**：$\boldsymbol{b}(t)=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3_{\mathbb{R}^3}}$.

其运动方程为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\tau}}(t) & \dot{\boldsymbol{n}}(t) & \dot{\boldsymbol{b}}(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}'(s) & \boldsymbol{n}'(s) & \boldsymbol{b}'(s)\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}(t) & \boldsymbol{n}(t) & \boldsymbol{b}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\kappa(t) & 0\\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\kappa(t) & 0 & -|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\sigma(t)\\0 & |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\sigma(t) & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

式中曲率 $\kappa(t)=\dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3_{\mathbb{R}^3}}$, 挠率 $\sigma(t)=\dfrac{[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\ddot{\boldsymbol{r}}(t),\dddot{\boldsymbol{r}}(t)]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}}$.

1.3 曲线的局部参数化

2 应用事例

事例 1 (三维空间中质点轨迹的速度及加速度表达形式)**.** 首先, 推导速度表达式

$$\boldsymbol{V}\triangleq\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}s}{dt}(t)=|\boldsymbol{V}(t)|_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\tau}(s),$$

式中 $|\boldsymbol{V}(t)|_{\mathbb{R}^3}$ 称为**速率**. 然后, 推导加速度表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\triangleq\dot{\boldsymbol{V}}&=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{V}|_{\mathbb{R}^3}}{dt}(t)\boldsymbol{\tau}(s)+|\boldsymbol{V}(t)|_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}s}{dt}(t)\\&=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{V}|_{\mathbb{R}^3}}{dt}(t)\boldsymbol{\tau}(s)+|\boldsymbol{V}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}\kappa(s)\boldsymbol{n}(s).\end{aligned}$$

可见, 三维轨迹的加速度相对于切向量的分量为速率的时间变化率, 相对于主法向量的分量为速率的平方乘以曲率半径, 相对于副法向量的分量为零.

3 建立路径

微积分讲稿 谢锡麟