复旦大学课程教学大纲

课程代码	MECH130093	编写时间	2013 年 12 月（更新）
课程名称	张量分析与微分几何基础		
英文名称	Fundamentals of Tensor Analysis and Differential Geometry		
学分数	2	周学时	2-3
*任课教师/课程负责人	谢锡麟	开课院系	力学与工程科学系
**预修课程	微积分、线性代数		

课程性质：

请根据教学培养方案上的课程性质在以下 4 个栏目中选择。

综合教育课程 ☐　　文理基础课程 ☐

专业必修课程 ☐　　专业选修课程 ☐

教学目标：

机械与运载工具运动、结构与材料宏观行为、大气与河流运动、鱼儿游动与鸟儿飞行、生命体中器官与组织运动等等，这些事务的一个共同特点为：所研究的对象（亦即介质）在空间中呈连续分布形态，称为连续介质；并且可以变形。连续介质力学，以统一的思想和方法研究连续介质（包括水、气体、软物质等）一般运动学和动力学等一般理论，故相关知识体系在力学、物理学、航空宇航、材料科学、计算机科学等学科具有广泛应用背景。

随着现代科学技术的发展，人们已越发关注纳米膜、细胞膜等连续介质，其法向特征尺度远远小于展向特征尺度；又如，考虑星体表面的大气运动，海面上油污扩散以及洪水蔓延过平原、洼地以及山丘，皂膜流动等，其法向尺度（流层厚度）远远小于流动的展现（流向）尺度。由此，我们将此类介质视作“几何形态为曲面的连续介质”。数学上而言，Euclid 空间中的曲面（对应 Riemann 流形）同体积（对应 Euclid 流形）在场论上具有本质不同。故我们提出，按连续介质的几何形态区分“体积形态连续介质”以及“曲面形态连续介质”。就二类几何形态各异的连续介质，我们近期已提出“当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论”以及“几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论”。

张量分析为研究连续介质的运动学（包括几何学）以及动力学提供了基本的数学思想及方法；且张量分析为研究现代几何学（包括流形上微积分）的必要数学基础。

经多年学习、研究与教学的积累，现已完成著述《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》（谢锡麟

著 2014 年正式出版，复旦大学出版社)，主要内容分成六部分：(一）张量定义及其代数性质。主要按张量的多重线性函数定义获得张量的表示形式及基本代数运算，基于置换运算研究外积运算并基于外积运算研究仿射量基本代数性质。(二）有限维 Euclid 空间中体积上张量场场论。主要叙述一般曲线坐标系下张量场场论及其应用，涉及湍流时均方程，旋转参照系下流体控制方程等。(三）有限维 Euclid 空间中曲面上张量场场论。分别按有限维 Euclid 空间上微分学以及微分流形的观点叙述有限维 Euclid 中曲面的基本几何性质以及曲面上张量场场论。(四）体积形态连续介质力学。叙述当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论（一般现有理论当前物理构型对应之曲线坐标系不显含时间)，涉及可变形边界上涡量运动学及动力学，有限变形弹性体 Euler 及 Lagrange 型控制方程等。(五）曲面形态连续介质力学（独立提出）。主要叙述几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论，涉及固定曲面上二维流动涡量动力学，固体膜有限变形及海面油污扩散的控制方程等。(六）张量映照微分学。主要概述一般赋范线性空间上微分学以及张量映照微分学的相关内容。

课程《张量分析与微分几何基础》，主要讲述第一、二、三、六部分的基本内容，为研究体积以及曲面形态的连续介质铺垫基础。课程《连续介质力学基础》，主要讲述第四、五部分的内容，将系统提供体积以及曲面形态的连续介质的有限变形理论及其应用。

基于本课程所提供的张量分析以及微分几何的有关知识体系（亦考虑到体系的现代化）可以很轻松地研习：一般连续介质力学理论，如郭仲衡著《非线性弹性理论》，主要讲述有限变形理论及其应用以及变分原理；谢多夫著《连续介质力学》(俄罗斯数学教材选译之一)。我们将上述知识体系作为课程《连续介质力学基础》的主要内容。另一方面，可研习现代微分几何，如：杜布洛文、诺维可夫、福明柯著《现代几何学：方法与应用》(俄罗斯数学教材选译)； V.I.Arnold 著《经典力学中的数学方法》(俄罗斯数学教材选译）等专著。

教材和教学参考资料（不少于 5 种）

作者	教材或参考资料名称	出版社	出版年月
谢锡麟	现代张量分析及其在连续介质力学中的应用	复旦大学	2014 年
郭仲衡	张量（理论和应用）	科学出版社	1988 年
杜布洛文，诺维可夫 福明柯	现代几何学：方法与应用（第一卷：几何曲面、变换群与场）俄罗斯数学教材选译	高等教育出版社	2006 年
黄克智，薛明德 陆明万	张量分析	清华大学出版社	2003 年
V.A.卓里奇(俄)	数学分析（上、下）(第 4 版） 俄罗斯数学教材选译	高等教育出版社	2006 年
谢多夫（俄）	连续介质力学 俄罗斯数学教材选择之一	高等教育出版社	2007 年

教学进度安排：

《张量分析及微分几何基础》（每周 3 学时，共 54 学时）

我们将张量分析与微分几何的“知识体系”（基本部分）分成若干个“知识点”，而每个知识点由若干“知识要素”组成。以下按知识体系的发展安排教学进度。可能会由于假期或者教与学的实际情况对进度稍作调整。

第一部分 张量及其代数运算 I

1. **张量的定义** ①基于多重线性映照；如未作特别说明，本课程中的底线性空间为有限维 Euclid 空间。②简单张量的定义。③有限维 Euclid 空间中的任意一个基，存在且唯一存在其对偶基（基于矩阵的分块运算及线性代数有关结论）。④张量空间上的线性结构，由此引入张量线性空间。⑤张量线性空间之间的张量积运算。
2. **张量的表示** ①基于简单张量获得张量的表示；涉及张量的协变、逆变以及混合型分量。②张量基，张量基之间的转化关系；③张量分量，张量分量之间的转化关系。

——第 01 周

第二部分 有限维 Euclid 空间中体积上张量场场论（微分学及积分学）

1. **曲线坐标系** ①基于有限维 Euclid 空间中微分同胚以及向量值映照澄清一般曲线坐标系的基本概念，包括局部基（协变基、逆变基），Christoffel 符号。②应用事例：获得一般速度、加速度在一般曲线坐标系下的表示。

——第 02 周

2. **体积上张量场微分学 I** ①张量场梯度。引入张量空间的范数，以此获得张量场的可微性定义，张量场的导数可表现张量场的梯度（左梯度、右梯度）。②张量场的协变导数。张量场梯度的分量即为协变导数；逆变导数则基于指标升降化至协变导数。③张量场（整体形式）的偏导数。在张量赋范线性空间的范畴下可按极限进行定义；基于张量场的可微性定义，易于获得具体计算式（基于协变导数）。进一步，可按上述途径定义张量场的方向导数及其计算式。④张量场的各种场论微分运算。基于张量场的偏导数，按形式定义的思想，可以定义张量场的各种场论微分运算，包括：Euclid 空间中张量场的左、右梯度、散度以及旋转，星算子等。⑤应用事例：连续介质力学中的应力张量，介质中某点某方向（对应以其为法向量的平面上）的受力，由应力张量（二阶张量，以曲线坐标为自变量）点乘法向量确定；应力张量的引出及相关结论基于四面体微元的受力分析。

——第 03 周

3. **体积上张量场的微分学 II** ①Eddington 张量。②度量张量。③协变导数的基本性质。主要结论有：(a) 有限维 Euclid 空间中 Eddington 张量、度量张量的偏导数都为零，对应 Eddington 张量及度量张量的所有分量其所有的协变导数均为零；相关结论又称为 Ricci 引理。(b) Euclid 空间中协变导数可以交

换次序；涉及 Riemann－Christoffel 张量。④张量场的各种场论恒等式。此处，我们直接在一般曲线坐标系下获得或者证明各种场论恒等式，此知识点在连续介质力学等理论体系中起着极其重要的作用，其知识要素包括：(a) Eddington 符号同 Kronecker 符号之间的关系；(b) Ricci 引理。注：此知识点所含知识要素很简要，但仅以这些知识要素就能推导或证明极其丰富的张量场场论恒等式，对理论及应用研究都具有极其重要的作用。⑤应用事例：弹性力学、流体力学理论中起重要作用的张量场恒等式的推演或证明。

——第 04 周、第 05 周

4. **非完整基（一般文献常称为非完整系）理论** ①非完整基定义。②非完整基下张量场梯度的表达形式。当然此处的张量场梯度是在完整基（完整系）下定义的；现在要在非完整基下获得张量场梯度（新的张量）的表达式，自然需基于不同基下张量分量之间的转发关系。非完整基理论，实际提供了一种“形式运算”，以最终获得非完整基下张量场梯度的表达式，其主要步骤，包括：(a) 相对于非完整坐标的形式偏导数；(b) 非完整基下的形式第二类 Christoffel 符号，形式第一类符号基于指标升降由形式第一类符号确定；(c) 非完整基下的形式协变导数，基于非完整基下的形式偏导数以及第二类 Christoffel 符号。③完整基为正交基，非完整基为单位正交基的非完整基理论与实践。此种情形下，获得非完整基下张量场梯度分量的形式运算变得十分简便。由此，为我们获得力学、物理上的各种张量场在单位正交基（源于正交完整基的单位正交非完整基）下的分量表示提供了切实的方法。④应用事例：张量场方程中典型项在常用单位正交基下的分量表示。典型项，如散度项、对流导数项、源项（Laplace 算子项）等；单位正交基，如柱坐标基、球坐标基、抛物双曲基等，都为非完整基。

——第 06 周

5. **基于曲线上标架的张量场场论** ①Frenet 标架及其运动方程。基于有限维 Euclid 空间之间向量值映照的微分学以及相关张量恒等式，获得曲线上 Frenet 标架及其运动方程；空间曲线曲率及挠率的定义及其几何意义；空间曲线的局部近似。②对连续介质某时刻所占的空间位置（当前构型）中某曲线之 Frenet 标架展开张量场梯度。此情形，完整基自然可为定义张量场梯度的基，而 Frenet 标架为非完整基，由此可按不同基之间张量分量的转换关系确定张量场梯度相对于 Frenet 标架的分量形式。③对某空间曲线上有定义的张量场（可以曲线参数为自变量），可计算其对应曲线参数的导数（可认识为沿曲线的变化率）。此情形，需利用 Frenet 标架及其标架运动方程。

6. **张量场的积分学** 内蕴形式广义 Gauss－Ostrogradskii 公式 基于微积分中 Gauss－Ostrogradskii 公式的指标形式，获得一般张量场面积分－体积分间恒等式的推演方法。

——第 07、08 周

第三部分 有限维 Euclid 空间中曲面上张量场场论（微分学及积分学）

1. **曲面基本几何性质** ①曲面的几何性质刻画。(a) 曲面上的第一、第二类张量。(b) Gauss 曲率及平均

曲率。基于线性代数中一个正定对称阵和对称阵可同时对角化的结论。(c) 曲面之斜截线及其曲率。(d) 曲面之法截线、主法截线及其曲率。(e) 曲面局部表示。②曲面上标架及其运动方程。基于有限维 Euclid 空间之间向量值映照的微分学，类比于一般曲线坐标系的概念建立，获得曲面上 Frenet 标架及其运动方程。③曲面的半正交基。m 维 Euclid 空间中某 m－1 维曲面的切空间可唯一确定与切空间正交的法向量（基于线性代数中齐次线性方程组理论）；籍此可定义基于曲面的半正交基，隶属完整基。上述基于曲面的半正交基的建立需要曲面是非褪化的，且半正交基可能仅在包含曲面的某一较薄的开集中存在。

——第 09、10 周

2. **曲面上张量场微分学（基于映照观点）** ①基于曲面上张量场可微性定义，引入曲面上协变导数。②定义于曲面上的张量场其整体形式相对于某曲面坐标的偏导数。③按定义于曲面上的张量场其对曲面坐标的混合偏导数可以交换次序的结论，引入 Riemann-Christoffel 张量，Ricci 等式（Gauss 方程）以及 Codazzi 方程。

——第 11、12 周

3. **曲面上张量场微分学（基于流形/算子观点）**①以有限维 Euclid 空间中光滑曲面（Riemann 流形）作为对象，按微分同胚以及列满秩映照叙述坐标卡以及地图册（概念及作用）。②流形上 Riemann 度量、Levi －Civita 联络、协变微分的坐标定义，Euclid 空间中曲面对相关概念的具体实现。③曲面切空间及余切空间；曲面上张量场。④同态映照及推前与拉回运算，基于参数构型中的微分同胚。⑤曲面上张量场的 Lie 导数与物质导数，Hodge 星算子，里积运算，外微分运算，流形上主要微分运算之间的关系。⑥力学、物理等方面的几何化相关内容。

——第 13 周。本部分有关内容在课程上仅做概述，学生可进一步研习。

4. **曲面上张量场积分学** 内蕴形式广义 Stokes 公式 基于微积分中 Stokes 公式的指标形式，获得一般张量场线积分－面积分间恒等式的推演方法。

——第 14 周

第四部分 外积运算及二阶张量（仿射量）的代数性质

1. **外积运算** ①对称及反对称张量的定义。②置换算子。基于置换算子可给予方阵行列式的解析表达式，为进一步推导行列式相关的结论提出了基础。③反对称化算子。④外积算子。外积算子的基本性质源于反对称化算子的性质。⑤反对称张量的表示形式。

——第 15 周

2. **仿射量的特征问题** ①仿射量特征问题的提法。包括：特征值，左、右特征向量，特征多项式。②仿射量的行列式。基于外积定义。③仿射量特征多项式的展开形式。涉及主不变量的外积表示。④Hamilton－Cayle 定理。基于外积运算获得。⑤矩。r-阶主不变量可由 1 阶直至 r 阶矩表示。⑥矩以及主不变量关于仿射量的导数。可先获得矩关于仿射量的导数；再由主不变量同矩之间的关系，获得主不变量关于仿

射量的导数。

3. **仿射量的代数分解** ①平均分解。②极分解。

——第 16 周

第五部分 张量赋范线性空间上的微分学

1. **张量赋范线性空间** ①张量线性空间上的范数。②不同阶张量赋范线性空间之间的映照，简称为张量映照。③张量映照的极限。
2. **张量映照的导数** ①若干种张量映照的一阶导数。基于张量映照的自身特点，其一阶导数可由对应的更高阶张量表示。②张量映照的二阶及高阶导数。基于张量值映照的无限小增量公式，研究高阶导数一般可获得更高精度的近似。③张量值映照的隐映照定理及逆映照定理。由于张量赋范空间具有完备性，故成立有张量值映照的隐映照及逆映照定理。可开拓相关理论的实际应用。

——第 17 周。本部分有关内容在课程上仅概述，学生可进一步研习。

附：

《连续介质力学基础》(每周 3 学时，共 54 学时)：(1) 几何形态为 Euclid 流形的有限变形理论。理论框架上，直接讲述当前物理构形对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论。(2) 本构关系的基本研究方法以及典型介质的本构关系。(3) 有限变形弹性静力学、动力学若干经典问题的半解析求解。涉及问题的 Euler 提法以及 Lagrange 提法；张量场多点形式的非完整基理论；基于非完整基理论进行经典问题的求解；此方面另提供学生开展数值实验以及真实实验的软硬件条件等。(4) 几何形态为曲面（Riemann 流形）的有限变形理论。叙述我们现已发展的理论思想及方法；研究现代几何学相关思想与方法的引入。(5) 几何形态为曲面的有限变形理论的应用研究。鼓励学生参与相关典型问题的数值实验及真实实验，可涉及固定曲面上的薄层流动（对应镀膜过程等）；薄膜的有限变形运算（如薄膜振动，旗帜与周边流场的耦合作用等）；皂膜流动；水面上污染物的扩散过程等。(6) 变分原理。(7) 连续介质力学一般理论的应用。这方面可具体涉及经典弹性力学、流体力学相关知识，以辅助和补充相关专业课程的学习；另可涉及考虑电场、磁场等其它作用的连续介质力学以期接近相关前沿科技。

考核方式（请明确考核是否包括平时成绩、作业、课堂互动、小测验、期中考试等，及它们在课程总成绩中的百分比。此外必须向学生明确课程期末的考核形式（课程论文、课题报告、口试、开卷笔试、闭卷笔试等）

闭卷考试（占 80%），平时成绩（包括课程讨论、平时作业等，占 20%）

**课程网络资源： 现已建设成二个课程体系网站： “微积分的一流化进程”课程体系 http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/ “现代连续介质力学理论及实践”课程体系 http://jpkc.fudan.edu.cn/s/353/ 网站上及时发布相关教学研究与实践的学术交流信息，学术论文；课程讲稿，参考试卷；课程录像；学生科研；课程评价等。
**教师教学、科研情况简介： 谢锡麟，男，1974 年出生。持续性有志趣于将现代数学的相关思想及方法借鉴于连续介质力学的基本理论及实践；注重基于高端数理知识体系发展可适合一类问题的新思想及新方法，注重理论联系实际；将自身学习、研究与教学互为融合、互为促进。目前已基本建设有“微积分一流化进程”以及“现代连续介质力学理论及实践（合作形式）”二条课程路径（已有课程网站），就知识体系的构建及传授具有系统的自身认识（含科研成果）；相关课程的广度及深度能类比国内外具有一流水平的教程或专著；教学效果理想，学生中有一定影响。上述教学路径的建设分别受市教委重点课程建设（2011 年）、市教委重点教改项目（2011 年）、复旦大学本科教学研究及教改激励项目（2013）等资助；2012 年至今在《中国科学》(英文版)、《力学季刊》及《复旦学报》上发表侧重思想及方法研究的学术论文 5 篇。现任复旦大学教学指导委员会委员，上海市力学学会理事并为学会下属教育委员会、流体力学专业委员会副主任。《力学季刊》、《水动力学研究与进展》编委。

*如该门课为多位教师共同开设，请在对课程负责人加以注明。
**为可选项目，请老师根据实际情况填写。