**Chapter 10 行波法和分离变量法 本征值问题**

**上章复习：数理方程的导出与定解问题：泛定方程加上定解条件（例如，初始条件、边界条件、衔接条件、自然条件和周期条件等）。**

**目标：求一个微分方程的解满足确定条件例如初始条件和边界条件等的问题。一般定解问题的分解：**



**解出问题I、II、III得则一般问题的解为，**

**求解问题I是基础，问题II可转化为I或III，问题III有多种解法。**

**Abstract：求解数理方程定解问题的方法有分离变量法、行波法、积分变换法、变分法、复变函数论等，这些方法各有千秋。分离变量法普遍适用，在其使用条件下，自然导致了问题的核心—本征值问题。**

**求解常微分方程：一般先求通解，再用某些定解条件定其参数；求解偏微分方程，即使求得通解，亦难于由定解条件来确定解（因为含有任意函数）—本征值问题可解决此类问题。**

1. **一维无界空间域的自由振动问题 达朗伯公式**（不讲解）
2. 行波法和d’Alembert公式（以无限长弦的自由振动为例）:

其中和是已知函数。

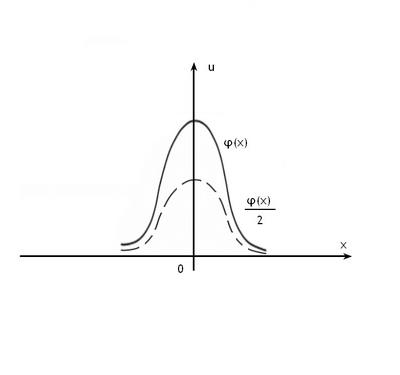
特征方程：. 解得 .于是作代换 ，原方程化简为.解之得 ，这是因为



其中和是分别以为宗量的任意函数。因此，，将之代入初始条件，有



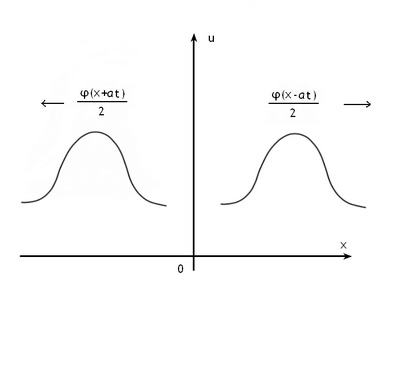


这就确定了和的函数形式，

—

d’Alembert公式。

1. 物理意义：

在时空点波形如，到了下一时空点,波形变为如则也就是说，是一个沿轴正方向以速度传播的行波；同理，是一个沿轴负方向以速度传播的行波。

在d’Alembert公式中，

第一项表示由初位移激发的行波在时的波形为，以后分成相等的两部分，独立地向左右传播，速率均为.

第二项表示由初速度激发的行波，时在处的速度为，在时刻，它将左右对称地扩展到的范围，传播速率也都是.

另外需要说明的是，这里我们没有明确写出边界条件，即或有界。严格来说，的确应该明确写出无穷远的条件。但是，对具体问题而言，这个条件可以由和的具体形式来得到保证。和总是会局限在一个有限的范围内，即，当增大时，和都会足够快地趋于. 因此，从d’Alembert解就可以看出，在有限的时间内，总还是在一个有限的范围内才不为. 从概念上说，所谓无穷长弦，当然只是一个理想化的抽象。它恰恰就表示：在我们所考察的时间和空间范围内，端点的影响可以忽略不计。

1. **一维半无界域的自由振动问题 初始条件的延拓**（不讲解）
   1. 齐次边界条件：端点固定：



其中和是已知函数。因为和以及仅仅在有定义，不能直接应用的d’Alembert公式。

为了能够应用d’Alembert公式，要设法将和以及的定义域延拓到（与Fourier展开时所作的延拓相似），并要满足边界条件. 如果这样的解找到了，那么它的的部分就是原定解问题的解。



为确定，将之代入边界条件，得

 .

记，上式改写为

.

由此可见，的形式（当其宗量为负值时）可以取为（取法不唯一，只要满足上式即可），.

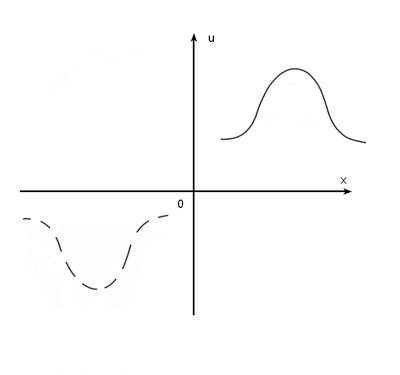
问题转化为 

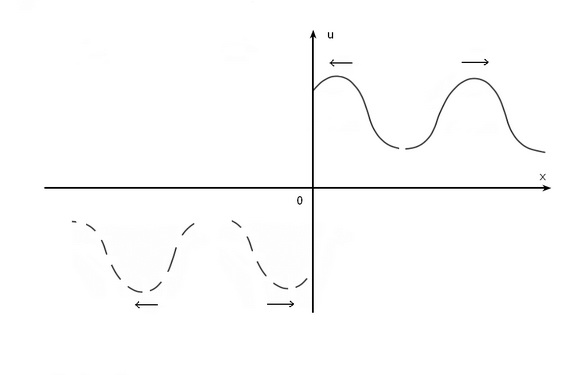
注意到，一定大于等于（因为），但可正可负，因此，当，即时，

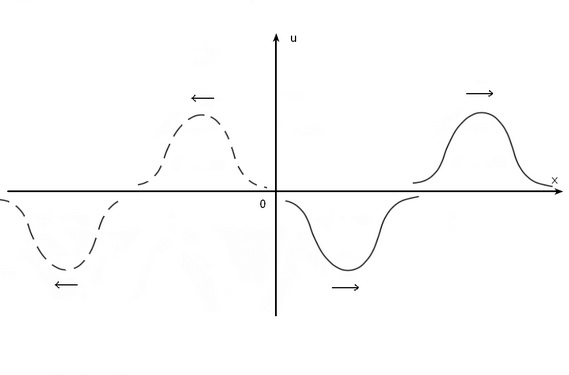
当，即时，

综上所述，我们得到原定解问题（）的解



物理意义：此解的部分与无界区域问题的解形式上是完全一样的，这说明了这样一个事实，对弦上某一点来说，由于波的传播速度是，来自端点的扰动需要经历的时间才能影响到点。当时，端点的影响尚未到达点，这时点的振动就如同无界弦一样。

在端点固定的情况下，端点处永远是波节，所作延拓是**奇延拓**。当波在端点处发生反射时，反射波位相将与入射波形相反，即位相有一突变值—**半波损失**（详见教材pp202-203）：当波碰到原点时立刻变号（方向与大小均变号），即处的合成波是波节反射后反射波继续传播，不过此波与原来波的位相有一突变值(大小与方向均变号)。



但是，在端点自由的情况下（如半无界杆的端是自由的）：





为确定，将之代入边界条件，得

.

记，上式改写为

 .

由此可见，的形式（当其宗量为负值时）可以取为

， ,

其中第一个式子来源于 这是**偶延拓.** 问题转化为



注意到，一定大于等于，但可正可负，因此，

当，即时，

当，即时，



综上所述，我们得到原定解问题（）的解:



* 1. 非齐次边界条件：

定解问题的解等于问题I的解和问题II的解之和，即

.

定解问题I的解前面已经给出，



现在讨论定解问题II的求解，

（1）因为该系统既没有外力作用，初始条件又为，所以点的扰动是系统振动的唯一原因（来源），因此，在区域，只能有向右传播的波而不能有向左传播的波。所以，变量和只能以或的组合形式出现于解中，而不能以另一种形式或的组合形式出现。

（2）就点来说，当时，点的扰动尚未影响到这点，这点仍处在平衡位置，所以解的形式是：.

（3）最后，由边界条件确定的具体形式，得 

所以，

**（三、由简述到一般）例如: 两端固定弦的自由振动问题:**



**[定解问题I型：齐次方程和齐次(固定)边界条件，非齐次初始条件]。**

第一步, **分离变量：**

**设,将此代入方程，即得**

****

**等式两端除以，就有 .**

**左端只是的函数(与无关)，右端只是的函数(与无关)。因此，要左端和右端相等，就必须共同等于一个既与无关、又与无关的常数。令这个常数为(参数)，即 .由此得到两个常微分方程组：**

** （10.1）**

** （10.2）**

**同样，将此代入边界条件，得 , （10.3）**

这就是分离变量，**即**导出了函数满足的常微分方程和边界条件，以及满足的常微分方程。分离变量之所以能够实现，是因为原来的偏微分方程和边界条件都是齐次的。

第二步,**求解本征值问题：**

常微分方程中含有一个待定常数，而定解条件，是一对齐次边界条件。只有当取某些特定值时，才有既满足齐次常微分方程，又满足齐次边界条件的非零解. 的这些特定值称为**本征值(eigenvalue)**，相应的非零解称为**本征函数(eigenfunction).**

由方程（10.2）解得,

将这个通解代入边界条件（10.3）,就有 

和不能同时为0，只能是，即.

于是只能取如下的一系列值： ；相应的本征函数为:记为: 这样求得的本征值有无穷多个，他们可以用正整数标记。我们把**本征值**和**本征函数**分别记为和.

第三步,**求特解，并叠加出一般解：**

**对于每一个本征值，由（10.1）解出相应的: .**

**因此，也就得到了满足偏微分方程和边界条件的特解:**

****

这样的特解有无穷多个。每一个特解都同时满足齐次偏微分方程和齐次边界条件。单独任何一个特解不能满足定解问题中的初始条件。由于偏微分方程和边界条件都是齐次的，把它们的特解线性叠加起来，即

.

这样得到的也仍然是齐次偏微分方程在齐次边界条件下的解。这种形式的解称为**一般解**。

**现在根据初始条件中的已知函数和定出叠加系数和.将上面的一般解代入初始条件，得**

**** 第四步,利用本征函数的正交性确定叠加系数**：**

**本征函数的正交性: .**

**本征函数的模方:** .****

**因此，在(10.4)式两端同乘以，并逐项积分，就得到**

**所以，.**

**同样可以得到，. 这样，根据初始条件中的**

**已知函数和，计算出积分，就可以得到叠加系数和，**

**从而就求得了整个定解问题的解。**

第五步**, 解的物理解释：**就两端固定弦来说，固有频率中有一个最小值，即，称为基频。其它固有频率都是它的整数倍，称为倍频。整个问题的解是许多驻波的迭加。这种解法也称为驻波法。

**将一个偏微分方程转化为几个常微分方程，同时边界条件亦可分离变量（如齐次边界条件）；常微分方程和相应的齐次边界条件构成了本征值问题，由此解出一系列本征值和本征函数族**。

**再例如:** 









**这正是波的分解与合成。这是I型定解问题：齐次方程和齐次(自由)边界条件，非齐次初始条件。**

1. **分离变量法**—（偏常）微分方程问题**[定解问题I型(**齐次边条**)]**

**1. 一维有界区域自由振动问题的驻波解**

(有界区域齐次边条振动问题，存在驻波、节点、本征频率和波的叠加等)

下面以两端固定弦的自由振动为例(1+1D问题):



定解问题I型：方程和边界条件都是齐次的，而初始条件是非齐次的。

第一步, **分离变量：**

设[取此特解形式，可得驻波解：是振荡函数，而与无关，是幅度函数，与无关],将此代入方程，即得



等式两端除以，就有.

注意在这个等式中，左端只是的函数，与无关，而右端只是的函数，与无关。因此，左端和右端相等，就必须共同等于一个既与无关、又与无关的常数。令这个常数为(**参数**)，即，.

由此得到两个常微分方程：

 （10.1）

 （10.2）

同样，将此代入边界条件，得

，，这时必须有

，[因为不可能恒为0，否则恒为0]. （10.3）

这样就完成了分离变量法求解偏微分方程定解（亦定界）问题的第一步：分离变量**。**在这一步中，假设所要求的是变量分离形式的非零解，导出了函数应该满足的常微分方程和边界条件，以及所满足的常微分方程。分离变量之所以能够实现，是因为原来的偏微分方程和边界条件都是齐次的（可分离变量）。

第二步,**求解本征值问题：**

上面得到的函数的常微分方程定解问题，称为**本征值问题**。其特点是：常微分方程中含有一个待定常数，而定解条件，是一对齐次边界条件。这样的定解问题不同于我们过去熟悉的常微分方程的初边值问题。下面将看到，并非对于任何值，都有既满足齐次常微分方程，又满足齐次边界条件的非零解。只有当取某些特定值时，才有既满足齐次常微分方程，又满足齐次边界条件的非零解. 的这些特定值称为**本征值(eigenvalue)**，相应的非零解称为**本征函数(eigenfunction).**

1. 设. 令，解（10.2）得

.

要使它满足（10.3） 我们有  由此知道只能，可见是不可能的。

（2）设. 由方程（10.2）解得，.

要使它满足（10.3），只能，可见也是不可能的。

（3）只能设. 由方程（10.2）解得，

.

将这个通解代入边界条件（10.3），就有

即

和不能同时为0，否则恒为零，恒为0（平凡解，虽然零解无物理意义，但至少说明数学上可能行得通），因此只能是，

本征值方程，解为 .

于是，只能取如下的一系列值：；

相应的本征函数就是：. 记为 

这里取，因为我们所要求的必然只是线性无关解。不同的值给出的是线性相关的。由于同样的原因，我们也不必考虑为负整数的情形。这样求得的本征值有无穷多个，他们可以用正整数标记（其实就是量子力学量子数）。因此，我们把本征值和本征函数分别记为和.

第三步,**求特解，并进一步叠加出一般解：**

对于每一个本征值，由（10.1）解出相应的:

.

因此，也就得到了满足偏微分方程和边界条件的特解:

 .

这样的特解有无穷多个。每一个特解都同时满足齐次偏微分方程和齐次边界条件。它们是一系列的实空间**驻波。**但是，一般来说，单独任何一个特解都不能满足定解问题中的初始条件。然而，由于偏微分方程和边界条件都是齐次的，把它们的特解线性叠加起来，即

.

这样得到的也仍然是齐次偏微分方程在齐次边界条件下的解（当然要求此级数收敛且可以逐项求二阶偏导，即求和与求导可以交换次序）。这种形式的解称为**一般解**。

现在根据初始条件中的已知函数和定出叠加系数和.将上面的一般解代入初始条件，得



注： 1. 和是已知函数而非任意函数。既要满足泛定方程又要满足定解条件。和均由构成。

2. 定解条件仅是其内部规律的一个极限。

第四步,利用本征函数的正交性确定叠加系数**：**

设和是分别对应本征值和的两个本征函数，（即）. 显然，它们分别满足

 （10.6）

， （10.7）

和  （10.8）

， （10.9）

用乘以(10.6)，用乘以(10.8)，两者相减并在区间积分，即得



其中利用了和所满足的边界条件（10.7）和（10.9）.

考虑到，因此，就证得**本征函数的正交性:**

.

进一步计算还可以得到本征函数的**模方:**

. 

因此，在(10.4)式两端同乘以，并逐项积分，就得到



所以，.

同样可以得到，.（实为傅里叶级数的奇延拓）

这样，根据初始条件中的已知函数和，计算出积分，就可以得到叠加系数和，从而就求得了整个定解问题的解。注意：每个边界的条件并非需要两个，只要构成本征值问题就可以了。不同边界条件构成不同本征值问题。

**Step 5,解的物理解释：**先看特解



其中，，和. 因此，代表一个驻波，表示线上各点的振幅分布，表示点谐振动。是驻波的圆频率，称为两端固定弦的固有频率或本征频率，与初始条件无关；称为波数，是单位长度上波的个数；称为位相，由初始条件决定。在，即的各点上，振动的幅度恒为0，称为**波节**。包括弦的两个端点在内，波节点共有个。在，即的各点上，振幅的绝对值恒为最大，称为**波腹**。波腹共有个。整个问题的解则是这些驻波的迭加。正是因为这个原因，这种解法也称为驻波法(a generalized method of the separation variables).

就两端固定弦来说，固有频率中有一个最小值，即，称为基频。其它固有频率都是它的整数倍，称为倍频。弦的基频决定了所发声音的音调。在弦乐器中，当弦的质料一定（即一定）时，通过改变弦的绷紧程度（改变张力*T*的大小），就可以调节基频的大小。基频和倍频的迭加系数和的相对大小决定了声音的频谱分布，即决定了声音的音色。

(不要求)还可以进一步讨论分离变量法的解和行波法的解两者之间的联系。为此，先将初始条件和作奇延拓





然后再延拓为周期为的周期函数[仍记为和].可以看出，这样延拓的结果保证了在端点也是奇延拓。将和展开为Fourier级数

， 其中，.

可以看到，，. 所以

和行波解的形式完全一致，只不过这里的和是由初始条件和按照前面的法则延拓而得的。另一方面，这样得到的解，当然只适用于区间.

**将一个偏微分转化为几个常微分方程，同时边界条件亦可分离变量（如齐次边界条件）；常微分方程和相应的齐次边界条件构成了本征值问题，由此解出一系列本征值和本征函数族** (Eigenvalues are independent on the driven source and initial conditions).

1. **矩形区域内的稳定问题**（2+0D问题）：



（物理问题的提法？）设，将代入方程，即得



等式两端同时除以，就有 

由此得到两个常微分方程：  

同样，将代入关于的一对齐次边界条件，得

，，这时也可以分离变量，得

，.

这样，我们得到本征值问题:

, ，.

（1）设. 令，解得 .

要使它满足边界条件，只能. 可见是不可能的。

（2）设. 解得 .

要使它满足边界条件，只能. 可见也是不可能的。

（3）设. 解得 .

将这个通解代入边界条件，就有

即

和不能同时为0，否则恒为零，因而恒为0（平凡解）。因此只能是本征值方程，解为 .

于是，只能取如下的一系列值：;

相应的本征函数就是：.

对于每一个本征值，可以求出相应的:



注：与等价，无(有)界域用 ().

因此，也就得到了既满足Laplace方程又满足的边界条件的特解:



把这些特解叠加起来，就得到一般解:

.

将上面的一般解代入关于的一对边界条件，得

利用本征函数的正交归一性:

就可求得



以及即

这样，就求得了矩形区域内Laplace方程边值问题的解。

**3．多于两个自变量的定解问题**（2+1D问题）



设 ，将此代入上述方程，分离变量得

 (1)

 (2)

再令，代入方程（2）及边界条件，再次分离变量

, (3)

， (4)

和 , (5)

， (6)

这里又引进了两个常数和，但，和中只有两个是独立的，它们满足，为了书写方便，我们额外地多写了一个常数。现在就着手求解本征值问题(3),(4):，，.

（1）设. 令，解得，.

要使它满足边界条件，只能，可见是不可能的。

（2）设. 解得，.

满足边界条件的非零解为，，为任意常数。

这样，也是一个本征值，相应本征函数取为

（3）设. 解得，.

将这个通解代入边界条件，就有

即

和不能同时为0，否则恒为0，即恒为0（平凡解）。因此只能是，，即， 

于是，只能取如下的一系列值：;

相应的本征函数（取）就是：.

把和结合起来，就可以写成

本征值:;

本征函数:.

同样，可以解得本征值问题（5），（6）： 本征值:; 本征函数:.

必须注意，这里的*n*和*m*是互相独立的，对于给定的*n*和*m*，再进一步求出方程（1）的解:

， ()

 (otherwise).

并且可以写成统一的形式:

，，

其中，

因此，也就得到了整个定解问题的特解，



把它们的特解叠加起来，就得到一般解，



将上面的一般解代入初始条件，得

.

利用本征函数的正交归一性:

和

就可求得.

注：数学上，分离变量法使得偏微分方程化为常微分方程组，引进的参数通过齐次边界条件来确定；本征值问题的物理本质：体系的对称性导致了与之相应的守恒量。

**四、定解问题II型（非齐次边界条件）的转化——边界条件齐次化**

首先以特例切入。 例1：求解半带形区域内的静电势，已知和上的电势都是0，而边界上的电势保持为常数.

解：电势的定解问题是



为了将分离变量法用于求解稳定场分布问题，并不要求（也不可能要求）所有的边界条件都是齐次的。为使和的边界条件齐次化，设，并使满足方程和边界条件. 显然，满足这些要求的的形式可以是 因此，的定解问题是



利用分离变量法，求得的一般解，它可以直接地写为



注：与等价, 无界域用,有界域用

与等价，无界域用,有界域用方便。

仅仅由还不足以定出待定系数. 实际上还存在一个自然边界条件: 有界（因为物理量在任何地方都应是有界的），相应的的边界条件为: 有界。因而，我们有；再由边界条件，定出展开系数. 综合上述结果，最后得到原定解问题的解为

.

意义：向：直流+交流；向：指数下降。玩具模型： 尖端放电。尺子

有了特殊，再看一般。问题II型的一般形式其中为线性算符（只出现各阶偏导的一次幂）。设法找出满足边界条件的**任一特别**函数(既是任意的但是又具有某些特别性质), 令，则定解问题II转变为



特别地，如果选得好，正好还使得，则上述关于的问题就化为定解问题I型了，否则，可分解为型。

如何寻找没有固定的方法，下面仅对几种情形提供点线索（但不一定是最好方案, 因为它不能保证泛定方程仍为齐次）:

可令

例如上述例1中，并且

可令

例如下述例2将看到， 但是不满足泛定方程；

可令

实际上上述三种情况就是令，然后由边界条件定出依赖于的

可令

这个实际上就是令，然后由边界条件定出 由于依赖于，这些一般不满足下面这个例子就说明这种情况，并且还是例外。

例2：求解长为的均匀杆的纵振动问题



解：按上述原则方案，视乎可取？但不满足泛定方程。此例可如下分析：泛定方程是对的二阶导数，边界条件为，可试设（分离变量法）。适当选取，使既满足泛定方程又满足边界条件（既要求边界条件齐次化，又要求易被解出），即



于是得到关于的方程

解之得. 所以

令于是的定解问题就为I类了：



显然，这样选择的不仅使的边界条件齐次化，也使的泛定方程齐次化（即已转化为问题I型）。当然可用分离变量法求解：





**说明1：**由于时空在数学上的对称性，在此I型1+1D波动问题中，虽然如果，则方程可变量分离，似乎时间方向的可构成本征值问题。其实不然，它只有零解（物理上，无源、无激发；数学上，亦要两端边界，而非一端边界的两个条件）。

**说明2：**数学上半无界时间空间只能是连续谱。由于驱动源于空间边界所以的内部亦只能有此单一连续的 当然的内部只能有 只有一端固定、另一端自由的方向的的确构成了本征值问题。

**说明3：**对于问题II型，到底只是简单地将边界条件齐次化，还是力求使方程也齐次化，需视具体问题而定。有时候，尽管也能使方程和边界条件同时齐次化，但如果齐次化函数的形式过于复杂，求解起来不是那么容易，而且导出的的定解问题也比较复杂。这时候也许还是找一个形式比较简单的函数，只将边界条件齐次化来得方便。问题化为III型，具体解法如下。

**五、定解问题III型（非齐次方程）的各种解法**

问题III型的一般形式 

1. 试探法—方程齐次化法

由观察、分析与试探，设法找出一个既满足相同非齐次泛定方程又满足相同边界条件的函数，令，则定解问题III可变为关于的问题I：

如果 则 

但由于的寻找无固定程序，所以此法可靠性不大。对于与泛定方程无关的纯边值问题，需要视具体情况而定，即主要是问题II。例如教材P210注1：首先解问题II，但是对于两个方向的边界条件，齐次的构成本征值问题；非齐次的用于确定系数。求举例：

例1．****

解题思路：方程的非齐次项仅为的函数，试设，并令它满足原来的非齐次方程及齐次边界条件，即解之即得上述结果。

而关于的定解问题为：



可用分离变量法解（自做）：

例2．****

解题思路：方程的非齐次项为常数，试设（不能视为常数，因为常数不能满足边界条件）并令它满足相同非齐次方程及齐次边界条件，即解之即得上述结果。而关于的定解问题为：



可用分离变量法解（自做）：

例3． ****

解题思路：方程的非齐次项仅为的函数，试设，并令它满足同一方程，即. 积分得****. 显然它满足第二类齐次边界条件，即.当然取最简单。设而关于的定解问题为：



可用分离变量法求解如下：设，将其代入方程，等式两端同时除以，就有 . 由此得到两个常微分方程：

同样，将代入关于的一对齐次边界条件，我们得到本征值问题: , ，.

解得本征值 和相应的本征函数. 同时由初始条件得故

讨论：仅仅以外驱动振动，与空间无关。当时，它是衰减式振动；当时，

1. 本征函数法（也称广义Fourier级数法）

2.1．如果方程非齐次项的形式比较复杂，难以求得非齐次化方程的特解（即难以寻找齐次化函数），或者方程本身比较复杂，那么可以采用下面介绍的**本征函数系展开法**。

先回忆一下分离变量法的解题过程: 

设，将其代入方程，即得 由此得

 (10.1)

，， (10.2)

所以本征值：; 相应的本征函数：.

通解： .

**分离变量解法的启示：**从分离变量法的解题过程可以**看出**，本征值、本征函数至关重要，只要求得了本征函数，则关于的方程可以通过直接求定解问题按本征函数系展开的广义Fourier级数形式的解即可。为此，就要令，将其代入泛定方程，得

.

因为0的Fourier系数必然为0（各级独立），故有 .

这正好就是方程（10.1），解出后代入即为方程的解。注意在这里问题本身可分离变量。也就是说，这是另一种方法，其优势在于，当泛定方程不可分离变量时，可将此法推广，即按本征函数展开时将待定系数化为广义方程而已。

2.2．解题示范：

此问题的物理提法之一：长为两端自由的均匀细杆初始处于静止平衡状态，在单位体积强迫外力的作用下而作纵振动，求杆的振动规律。

解：先求本征值和本征函数：视为0，得相应齐次定解问题



分离变量得本征值问题: ，，.

解得，本征值: ;相应的本征函数：.

再令本题的，注意这里的并非相对应齐次定解问题的本征函数，将此形式解代入泛定方程，得



将右边也按作Fourier展开(本例已展开了)，比较系数并由初始条件得



时，显然只有0解。时，一方面方程为非齐次的，其通解为任一特解与对应齐次方程通解的迭加。另一方面，迭加系数只有两个。此处对应齐次方程的通解为，非齐次方程的特解可由“待定系数法”、“常数变异法”[注]以及第八章中的定理四等求得，它是 因此

.

由初始条件和得



代入得定解问题的解:



此物理问题有两个频率：本征频率和强迫频率 当两者相等时发生共振（Resonance）。

[注]**常数变异法：** 设所要求解满足的方程为



常数变异法的三个步骤为

1)解出对应齐次方程的通解：

2)为了消灭非齐次方程中的项，将和视为的函数，



注意这其实是一种函数变换，和是对应齐次方程的两个线性无关解。将此形式解以及其和的表达式代入非齐次方程，令项前的系数为零得到下面第一个方程；再对其两边求导，代入这个简化了的非齐次方程得到下面第二个方程：



3)联立上面两个方程组解出和，再积分得和，代入即得一个特解。

由“分离变量解法的启示”和解题示范可以看出，**本征函数法**的中心思想是设法找到一组本征函数（其实它就存在着！）。只要这组本征函数是正交、完备的，那么就可以:

（1）直接令具有按本征函数系展开的广义Fourier级数形式[在这里，其系数是作为的函数，而非相对应齐次定解问题的本征函数，当然齐次方程时就是它自己了]；

（2）将此形式的代入泛定方程；

（3）并将亦按此本征函数系展开（一定是匹配的！）；

（4）比较方程两边关于的系数[相对于级数解中前的系数或Fourier级数前的系数，一般化]即得关于的线性非齐次常微分方程（组）；

（5）结合有关的定解条件解出，代回展式即得问题III的解。

前提是要先求出本征值和本征函数。最简单的做法是选择为相应齐次定解问题的本征函数。例如振动问题可以理解为，当边界条件一定时，强迫振动和自由振动有相同的固有振动－eigenfrequencies. 还有其它办法，例如选取业已存在的、与所求问题具有相同自变量定义域的本征函数系，作为基矢来“表示”。

2.3．这种**本征函数系展开法**（即以上五点）还可推广。以具有第一类齐次边界条件的1+1D波动问题为例，其定解问题为：



解：先求本征值和本征函数：令得相应齐次定解问题



分离变量得本征值问题:

解得本征值和本征函数

再令，注意这里的并非相对应齐次定解问题的本征函数 为了求得,还必须同时将已知的函数亦按此本征函数展开（一定可以做得到这一点）：



其中展开系数亦已知。将此形式解和的展式代入泛定方程，得



将此形式解和的展式代入初始条件。比较各个本征函数前的系数（包括上述方程和初始条件），得



解出此初值问题的解以后[方法同前，即“待定系数法”、“常数变异法”和第八章中的定理四等]，得定解问题的解

.

2.4．这种**本征函数系展开法**还可进一步推广。例如一维无源导热问题：



解：此无界域的本征函数系为平面波，本征值为连续的波数把看作参数，将和按此本征函数 展开（实为Fourier transforms，当然它们要满足Fourier transform条件）：

****





将这些Fourier transforms代入定解问题的方程，得



其中初始条件中的展开系数为已知，而展开系数满足上述定解方程。这个定解方程的解为

因为，，并利用

即

和卷积定理，得的反Fourier transform，即一维无源导热问题的解为



实际上，这就是第十一章中（不要讲解）的Fourier transform方法。

注(1): 方程在无界域的本征函数为平面波，本征值为连续的波数 Fourier transform时需要知道和的卷积。否则只能分立化，见注(2)，再取

注(2): 方程在有界域的本征函数为，本征值为分立的　将和按此本征函数展开：



其中展开系数已知，而展开系数待定。将此形式解和已知函数的展式代入泛定方程，由的正交性，即比较上述方程两边的系数，我们得到关于的线性代数方程组，解此代数方程组以后，就得出问题的解。一来这是级数解的推广，二来这是物理问题的最一般、最常用的“表示”理论和数值解法。

注(3): 分立能级时本征函数的正交、归一性(为权函数)：



连续能级时本征函数的正交、归一性：



2.5．对于有界域问题，本征值为分立谱，本征函数在分立的Hilbert空间为正交、完备、归一函数系。例如在多体问题中，研究Fermi体系的超导与超流时，假设多体系统由两分量的Fermi气体组成。当Fermi子之间存在吸引作用时，两分量Fermi原子仍为Fermi子，其多体效应由Cooper对来体现，Fermi子集体合作理论就是著名的BCS(Bardeen, Cooper,and Schrieffer)超导理论。当Fermi子之间存在排斥作用时，由于两体束缚能的出现，两分量Fermi原子组成广义Cooper对(Bose子)，从而发生BEC(Bose-Einstein condensation).今天的实验条件已能够连续调控原子之间的相互作用强度，从而发生BCS-BEC crossover(渡越).在1D情况下，势相互作用的BCS-BEC crossover模型是严格可解的（Bethe ansatz：不碰，自由，平面波，FT；碰，波函数不连续）。动量空间的密度满足Fredholm积分方程(含参数)：



与相互作用强度有关. NC： How to do FT in the finite space?

求解这个积分方程的有效方法，就是选择一组正交、完备、归一函数系，将其展开，并求其系数即可。能够使动量空间密度的收敛性特别好的本征函数系是 假设 

其中展开系数待求。同时将积分核亦按展开：



其中展开系数为



将这些展式代入Fredholm积分方程，我们有



由Legendre多项式的正交性，即比较上述方程两边 的系数，我们得到 



求此代数方程组可得计算精度与有关，是和的函数。总之，解为

1. 冲量法（只适用于非稳定问题）（不要求）

为求  先解 

解出后，再将其中换成.

结果：.

解题示范：

先解 

解得 .

用换，得. 结果：



**六、Sturm-Liouville型方程的本征值问题**

用分离变量法求解定解问题的核心是本征值问题―寻找业已存在的正交完备系。有了此本征值和本征函数，一来可解许多类别的其它物理数学问题，二来物理学家的目标就是探求、表示和解释依此表征的物理现象的本质。

例如第I类边界条件：

它的本征值和本征函数分别是和 .

再如第II类边界条件：它的本征值和本征函数分别是 和.

还有自然条件：

它的本征值和本征函数分别是和****.

1．本征值问题的一般提法. 对于二阶线性齐次方程：

 （\*）

以函数[即]乘其两端以后，方程总可以写成[]



这种形式的方程称为Sturm-Liouville型方程，其中是一个参数，并且物理上称为权函数，例如圆系面元的；球系体元的（方向）和（方向）。把方程左边中的三项，即和项，写成这种形式是为了强调这个方程是用分离变量法从物理上的偏微分方程得到的。例如振动(含指数减少/增长)方程和Legendre方程：





一般的Sturm-Liouville型方程，在一定的边界条件下，只有当参数取某些特定值时才有非零解，这种值称为本征值，而相应的非零解成为问题的本征函数。

要使Sturm-Liouville型方程构成本征值问题需要附加什么样的边界条件？

对于，**通常有三种提法：**

（1）时，则要附加齐次边界条件，

[这包含了三类齐次边界条件，即第I、II、III类齐次边界条件].

（2）时，可附加周期边界条件.

例如， 

它的本征值和本征函数分别是

；.

或 ;. 有界区域：

注：当时，一个本征值对应两个本征函数--二度简并 (degeneracy).

（3）而且是的一阶零点，应附加自然边界条件 因为第八章中的定理三：若是方程****的一个特解，则方程的另一个线性无关的特解为



对应到我们这里，方程（\*）中

所以， 

也就是说，当是的一阶零点时，两个线性无关解中的一个，即在点必为，故应舍弃。例如****中当为奇（偶）数时的奇（偶）函数**** 这里是的一阶零点。 ****为物理解，并且它是有限的多项式；而另一个偶（奇）函数已经被舍弃了，因为它是发散的级数形式。

2．本征值问题的一般性质

设在上，［可以，或，但需要附加自然边界条件］均有一阶连续导数，连续（或最多在或上有一阶极点），则S.-L.本征值问题有下述性质:

（1）所有的本征值是非负的实数，即.（Hermite性：）

证明：设是对应于的一个本征函数，则有

**.**

以乘此方程，然后积分，有

.

经分部积分，得到 [注意，]

对于齐次边界条件，，



（对于物理问题来讲，都是这样的，见chapter 9导出的边界条件），解出和，得

，.

并利用即得 .

而对于，或周期边界条件，有

.

显然有 . 又因为，所以. 例如，宽为的1D无限深势阱， 一维量子谐振动，

设为一定函数空间内的线性微分算符，在一定的边界条件下，方程  构成本征值问题：

Hermite operator (又称共扼或者自伴算符)：对于一定函数空间内的任意两个函数和，有



Hermite算符的本征值是实数：因为  和

 所以



又因为所以即Hermite算符的本征值是实数。

（2）存在无限多个分立的本征值，

而且. 除周期性边界条件外，所对应的本征函数 的节点数比所对应的本征函数的节点数多一个。例如，1D无限深势阱Legendre polynomials ****为阶多项式，在随节点数递增。

[see next chapter, 其证明通常借助积分方程理论，证明从略]。

（3）对应于不同本征值和的本征函数和在区间上带权正交，即  

证明： （1）

 （2）

将方程（2）取共轭复数，并注意是实数，有

 （3）

，然后两边同时积分，可得



其中反推时首项有而末项有这两项正好相消。对于齐次边界条件，

，



得 ，. 因此，具体将这些关系代入上式得. 又因为，所以



对于，或周期边界条件，同样成立。

这是常见的三角函数族正交性的推广。不过还包括两个方面，其一是被积函数中出现权函数，其二是考虑到本征函数可能为复数。

注：在简并情形，对应同一本征值的线性无关本征函数不一定正交，但可正交化（详见量子力学）。

（4）本征函数族在区间上构成正交完备系(see chapter 7)。因此，满足与有相同的边界而且相当光滑的任何函数必定是的线性迭加，即 ，其中系数

，.

此式称为关于的广义Fourier级数。 称为的模，（see the next chapters）而称为的归一化常数，称为归一化波函数。常用特殊函数中，的具体计算见第12和13章。称为在基矢下的“表示”。

\* 对于常微分方程的本征值问题，除周期性边界条件外，都是非简并的。

\*\*数学在前，是基础，首先以特例切入。物理学用到了这些数学。尤其是物理学给这些数学问题赋予了物理意义。不但对人类认识自然进行了一次革命，而且发展了科学技术。

HW: 10.5; 10.6; 10.9; 10.14.

10.6: BCs:  线性压缩。