

第二讲 数学基础 (I): 函数分析

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

1. 基础函数

1.1 效用函数 (utility function)

1.2 生产函数 (production function)

2. 常用方程

2.1 定义方程

2.2 行为方程

3. 函数分析中的基本公式和定理

3.1 解函数的存在性

3.2 解函数的性质

3.3 函数求解

4. 课后作业

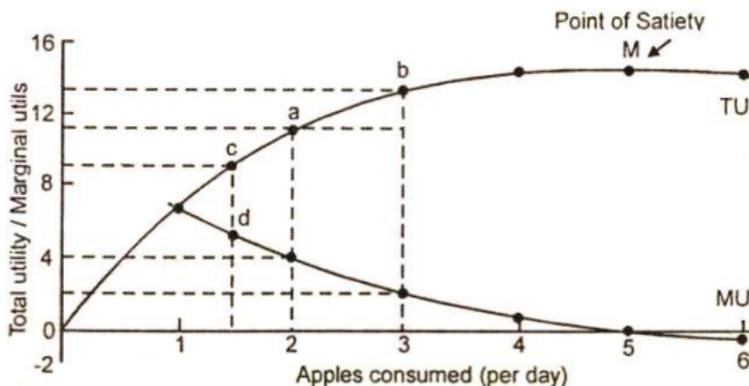
效用函数的定义：一种商品

$$U = u(x), x \geq 0$$

- ▶ 消费的非饱和性 (non-saturated)，即边际效用 (marginal utility) 为正：

$$\frac{dU}{dx} = u'(x) > 0$$

- ▶ 边际效用递减 (diminishing marginal utility) : $\frac{du'}{dx} = u''(x) < 0$



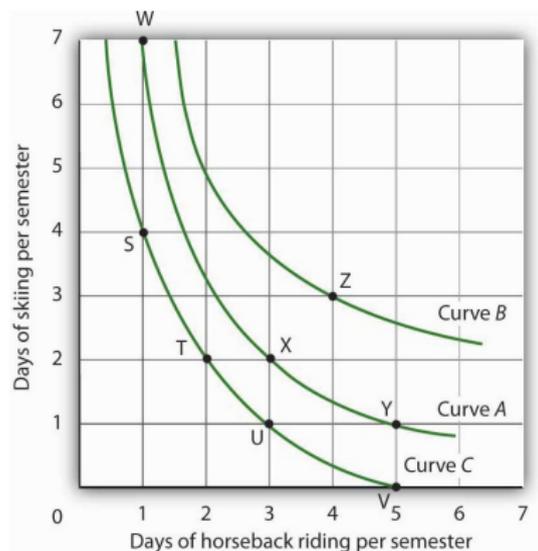
Source: http://economicsconcepts.com/total_utility_and_marginal_utility.htm

效用函数的定义：多种商品

$$U = u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_i \geq 0$$

- ▶ 无差异曲线 (indifference curve) :
 $U_U < U_X = U_Y < U_Z$
- ▶ 边际替代率 (Marginal rate of substitution) : 效用保持不变时, 每增加1单位 j 商品的消费所放弃的 i 商品的消费量。

$$MRS_{ij} = -\frac{dx_i}{dx_j}$$



效用函数的常用形式

1. Cobb - Douglas:

$$u(c) = \prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}$$

2. Stone - Geary:

$$u(c) = \prod_{i=1}^N (c_i - \underline{c}_i)^{\beta_i}, \quad \gamma_i \geq 0$$

3. Exponential utility:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{-e^{-\alpha c}}{\alpha}, & (\alpha > 0) \\ c, & (\alpha = 0) \end{cases}$$

4. Power utility function:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & (\gamma > 0, \gamma \neq 1) \\ \ln c, & (\gamma = 1) \end{cases}$$

不确定性条件下的效用函数

考虑到人们对风险的厌恶和规避 (risk aversion), 阿罗和帕拉特提出了两种风险规避程度的测度指标 (Arrow-Pratt measure):

- ▶ 绝对风险规避 (absolute risk-aversion, ARA)

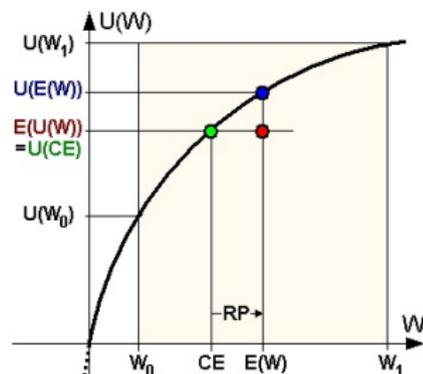
$$\alpha = -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

- ▶ 相对风险规避 (relative risk-aversion, RRA)

$$\gamma = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$$

上述两种指标不变的效用函数分别称为**常绝对风险规避 (CARA)** 和**常相对风险规避 (CRRA)** 的效用函数。

练习: 计算指数效用 (Exponential utility) 和幂律效用 (Power utility) 函数的风险规避系数



Utility function of a risk-averse (risk-avoiding) person: CE - Certainty equivalent; $E(U(W))$ - Expected value of the utility (expected utility) of the uncertain payment; $E(W)$ - Expected value of the uncertain payment; $U(CE)$ - Utility of the certainty equivalent; $U(E(W))$ - Utility of the expected value of the uncertain payment; $U(W_0)$ - Utility of the minimal payment; $U(W_1)$ - Utility of the maximal payment; W_0 - Minimal payment; W_1 - Maximal payment; RP - Risk premium

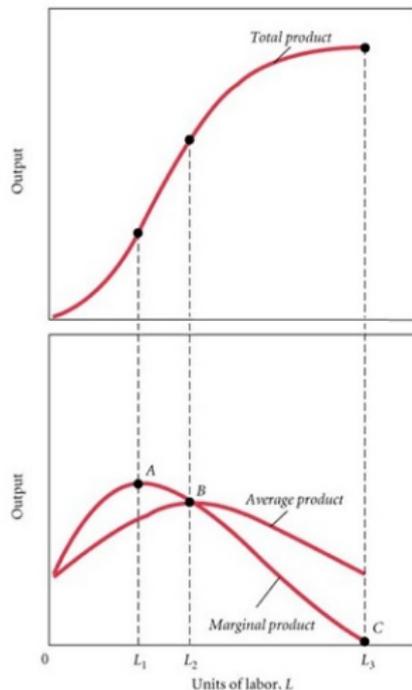
生产函数的定义

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_N), x_i \geq 0$$

- ▶ 边际产出 (marginal product) 为正：

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = f_i > 0$$
- ▶ 边际产出递减 (diminishing marginal product)：

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f_{ii} < 0$$
- ▶ 边际产出由上到下穿过平均产出 (average product) $\bar{y}_i = \frac{y}{x_i}$ 的最高点。



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Production_function

生产函数的常用形式

1. Leontief production function

$$y = \min \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

2. Cobb - Douglas:

$$y = \prod_{i=1}^N x_i^{\beta_i}, \quad (\beta_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i = 1)$$

3. Constant elasticity of substitution (CES):

$$y = \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i^{\rho} \right]^{1/\rho}, \quad (\rho \in (-\infty, 1], \quad a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N a_i = 1)$$

定义方程

► 微观:

- 消费者预算约束:

$$\sum_{i=1}^N p_i c_i \leq W$$

- 厂商预算约束:

$$\sum_{i=1}^N p_i x_i \leq C$$

定义方程

▶ 微观：

- ▶ 消费者预算约束：

$$\sum_{i=1}^N p_i c_i \leq W$$

- ▶ 厂商预算约束：

$$\sum_{i=1}^N p_i x_i \leq C$$

▶ 宏观：

- ▶ 国内生产总值：

$$Y = C + I + G + NX$$

- ▶ 长期预算约束：

$$-W_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{NX_t}{(1+r)^t}$$

应用：经济核算

- ▶ 根据国内生产总值核算公式： $Y = C + I + G + NX$ ，记变量 x 的增长率和占比分别为：

$$g_x = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}, \quad s_x = \frac{x_{t-1}}{Y_{t-1}}, \quad (x \in \{C, I, G, NX\})$$

则每年产出的增长率可分解为下式，某种需求对产出增长的贡献率为 $\frac{s_x g_x}{g_Y}$ ，可以用来从需求的角度评价一个国家的经济增长动力。

$$g_Y = \sum_x s_x g_x = s_C g_C + s_I g_I + s_G g_G + s_{NX} g_{NX}$$

应用：经济核算

- ▶ 根据国内生产总值核算公式： $Y = C + I + G + NX$ ，记变量 x 的增长率和占比分别为：

$$g_x = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}, \quad s_x = \frac{x_{t-1}}{Y_{t-1}}, \quad (x \in \{C, I, G, NX\})$$

则每年产出的增长率可分解为下式，某种需求对产出增长的贡献率为 $\frac{s_x g_x}{g_Y}$ ，可以用来从需求的角度评价一个国家的经济增长动力。

$$g_Y = \sum_x s_x g_x = s_C g_C + s_I g_I + s_G g_G + s_{NX} g_{NX}$$

- ▶ 给定总量生产函数 $Y = AF(K, L)$ ，类似地有 $g_Y = g_A + s_K g_K + s_L g_L$ 。假定总量生产函数为柯布-道格拉斯形式 $Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ ，则有：

$$g_Y = g_A + \alpha g_K + (1 - \alpha) g_L$$

技术和制度进步对经济增长的贡献率为 g_A/g_Y ，由此可以从供给角度评价一个国家的经济增长质量。

JONES(2014): 美国经济增长核算

Growth Accounting for the United States

	1948–2011	1948–1973	1973–1995	1995–2007	2007–2011
Output per hour, Y/L	2.5	3.3	1.5	2.7	1.9
Contribution of K/L	0.9	0.9	0.7	1.1	1.1
Contribution of labor composition	0.2	0.2	0.3	0.2	0.4
Contribution of TFP, A	1.4	2.2	0.5	1.5	0.4

The table shows the average annual growth rate (in percent) for different variables.

Source: Bureau of Labor Statistics, *Multifactor Productivity Trends*.

Source: Table 6.2 in *Macroeconomics* by Jones(2014).

行为方程：以汇率决定理论为例

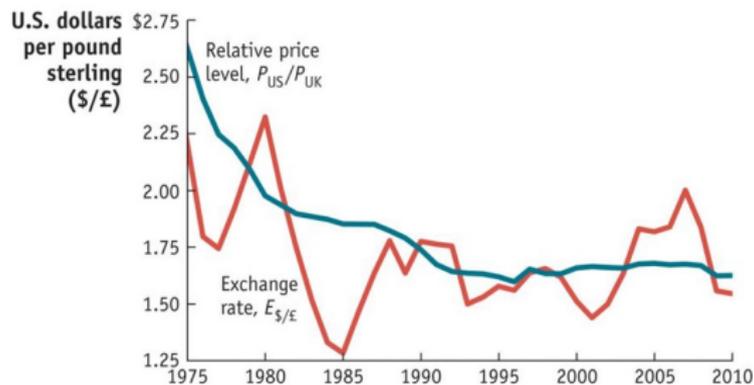
- ▶ **购买力平价 (Purchase Power Parity, PPP)** 理论认为，货币的价值在于其购买力，因此当国际商品市场处于均衡状态时，汇率水平就取决于不同货币对“一揽子可贸易商品”的购买力之比。

$$E = \frac{eP}{P^*}$$

- ▶ **利率平价 (Interest-rate Parity, IP)** 理论认为，用不同货币计价的金融资产可以提供相同的预期收益率时，外汇市场处于均衡状态，下述IP条件成立：

$$\frac{E^f}{E} - 1 = i - i^*$$

PPP和IP的实证检验



图片来源: Feenstra and Taylor(2014).

行为方程：以消费为例

- ▶ **静态：** 消费者的商品需求： $c_i = \frac{\alpha W}{p_i}$

行为方程：以消费为例

▶ **静态：** 消费者的商品需求： $c_i = \frac{\alpha W}{p_i}$

▶ **动态：**

▶ **凯恩斯的消费理论：** 消费取决于当期收入水平。

$$C_t^K = C_0 + C_Y^K \cdot Y_t$$

▶ **莫里蒂亚尼的生命周期假说 (LCH, Life Cycle Hypothesis)：** 各期消费取决于一生的总收入水平，一生的总消费等于总收入。

$$C_t^L = C_Y^L \cdot Y^L$$

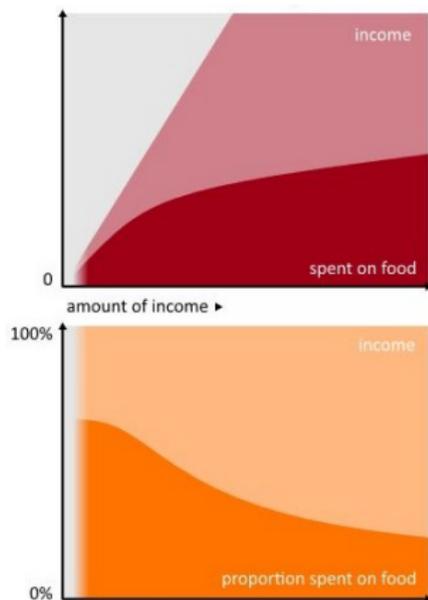
▶ **弗里德曼的永久收入假说 (PIH, Permanent income hypothesis)：** 各期收入包括波动较大的暂时性收入和较为稳定的永久性收入 $Y_t = Y_t^T + Y_t^P$ ，消费只取决于永久性收入部分。

$$C_t^P = C_Y^P \cdot Y_t^P$$

应用：恩格尔定律

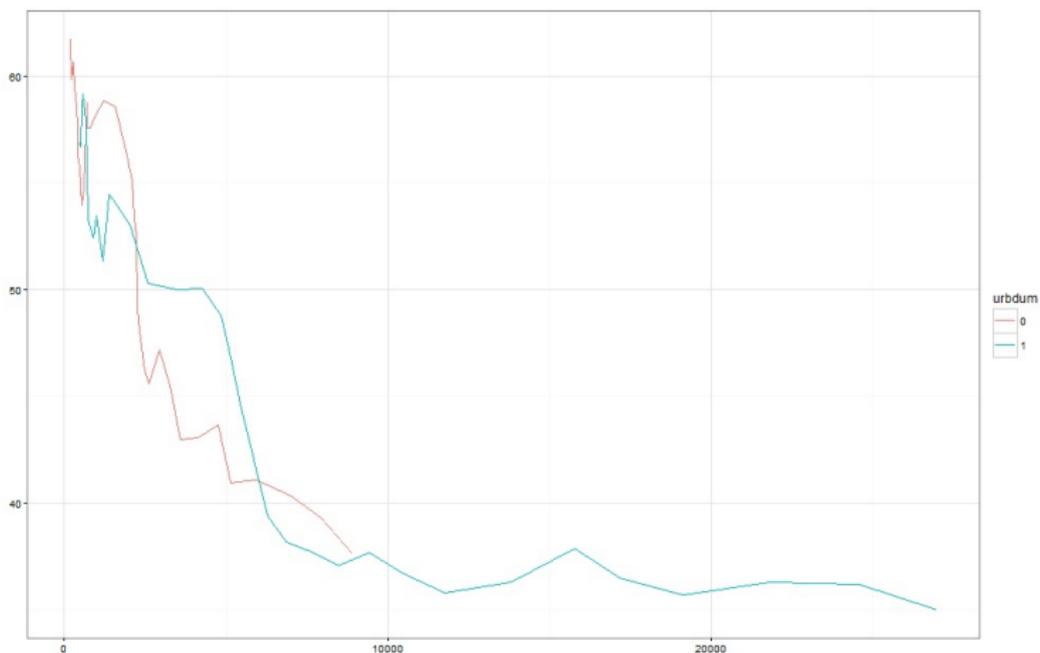
Wiki:

- ▶ **Engel's law** is an observation in economics stating that as income rises, the proportion of income spent on food falls, even if actual expenditure on food rises.
- ▶ The law was named after the statistician Ernst Engel (1821 - 1896).



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Engel%27s_law

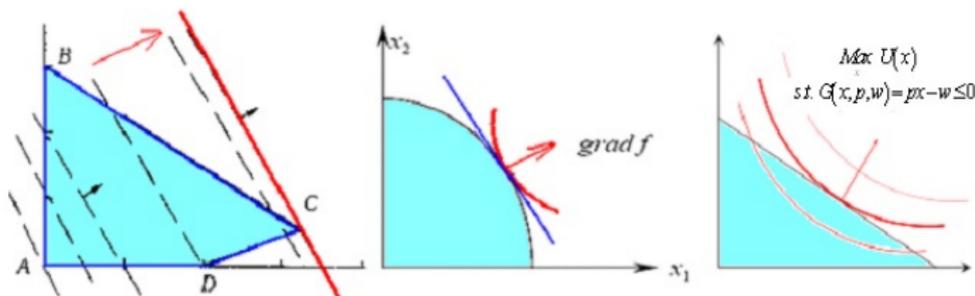
1978~2013年中国城乡家庭恩格尔系数



数据来源：国泰安“城乡居民家庭人均收入及恩格尔系数文件”。横轴单位元，纵轴单位%。

最优解的存在性

- ▶ Weierstrass定理（或极值定理，Extreme value theorem）：定义在非空紧集¹ X 上的连续实值函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 有极大（和极小）值。



- ▶ 以消费问题为例，MWG（2001）定理 3.D.1：
若 $p > 0$ ，且 u 连续，则UMP问题有解。

[1]: 度量空间中的有界闭集为紧集。闭集 X 中的每个极限点 $x \in X$ 。

最优解的唯一性

- ▶ 以消费问题为例，MWG (2001) 定理 3.D.2:

当 x^* 存在时，如果偏好 \succsim 是凸的（效用函数 u 拟凹），则 x^* 是一个凸集；如果偏好是严格凸的（效用函数严格拟凹），则 x^* 唯一。

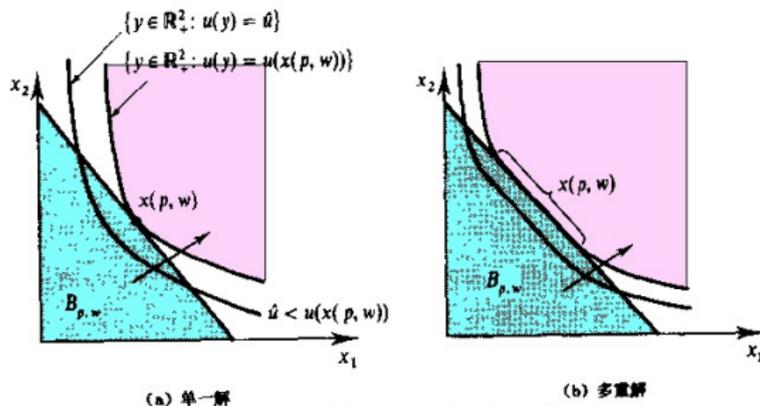


图 3.D.1 效用最大化问题(UMP)

连续性与可微性

► 最大化定理 (Theorem of the Maximum):

当目标函数 $u(x; \theta)$ 连续, 约束条件 $G(x; \theta) = 0$ 所隐含的约束对应 $g(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 为紧值、连续对应时, 最大值点对应 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 存在且上半连续, 为单值对应时最大值函数 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 和相应的价值函数 $u(x^*(\theta); \theta) = u^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 都连续。

连续性与可微性

▶ 最大化定理 (Theorem of the Maximum):

当目标函数 $u(x; \theta)$ 连续, 约束条件 $G(x; \theta) = 0$ 所隐含的约束对应 $g(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 为紧值、连续对应时, 最大值点对应 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 存在且上半连续, 为单值对应时最大值函数 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 和相应的价值函数 $u(x^*(\theta); \theta) = u^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 都连续。

▶ 为方便分析, 一般假定 $x^*(\theta)$ 和 $u(x; \theta)$ 可微。

泰勒公式与最优问题的求解条件

- 泰勒公式：假定函数 $f(x)$ 在 x^* 的邻区域内 k 阶可导，则：

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \dots + \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x - x^*)^k + o((x - x^*)^k)$$

泰勒公式与最优问题的求解条件

- ▶ 泰勒公式：假定函数 $f(x)$ 在 x^* 的邻区域内 k 阶可导，则：

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \dots + \frac{f^k(x^*)}{k!}(x - x^*)^k + o((x - x^*)^k)$$

- ▶ 以消费者问题为例，假定目标函数 $u(c)$ 对决策变量 c 二阶可微，且 $u' > 0$, $u'' < 0$ 。求解 $\underset{c}{Max} u(c)$ 问题，我们对 $u(c)$ 在 c^* 附近做二阶泰勒展开：

$$u(c) = u(c^*) + u'(c^*)(c - c^*) + \frac{u''(c^*)(c - c^*)^2}{2} + o((c - c^*)^2)$$

c^* 为最优解，即 $u(c) \leq u(c^*)$ ，且为内点解的必要条件为：

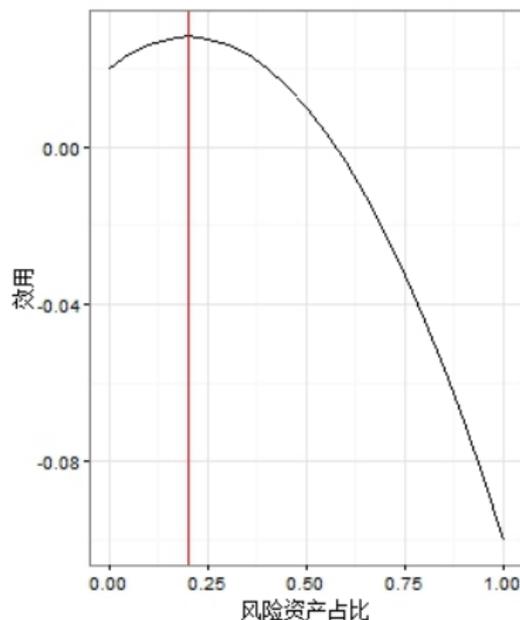
- ▶ 一阶条件 (FOC) : $u'(c^*) = 0$
- ▶ 二阶条件 (SOC) : $u''(c^*) \leq 0$

应用：最优投资组合

- ▶ **经济问题：** 如果知道无风险资产的收益率 r_f 、风险资产的收益率和方差 μ, σ^2 ，以及效用函数的形式和参数，那么风险资产在个人总资产中应占有多大比例？
- ▶ **数学描述：**

$$\text{Max}_{\theta} U = \theta\mu + (1-\theta)r_f - \frac{1}{2}A\theta^2\sigma^2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\mu - r_f}{A\sigma^2}$$



数值求解的牛顿-拉夫逊方法

求解方程 $\nabla f(x) = 0$ 的牛顿-拉夫逊方法 (Newton-Raphson method): 假定函数 $\nabla f(x)$ 在定义域 $[a, b]$ 内一阶可导, 且存在 $x^0 \in [a, b]$ 满足 $\nabla f(x^0) \neq 0$ 且 $\nabla^2 f(x^0) \neq 0$ 。由:

$$\nabla f(x) \approx \nabla f(x^0) + \nabla^2 f(x^0)(x - x^0) = 0$$

可得:

$$x = x^0 - [\nabla^2 f(x^0)]^{-1} [\nabla f(x^0)]$$

如果 $\nabla f(x) \neq 0$ 且 $\nabla^2 f(x) \neq 0$, 则替换 $x^0 = x$ 后重复上述步骤直至 $\nabla f(x) = 0$ 。

1. 消费与产业结构变迁

假定消费者面临下面的最优化问题 ($\underline{c} > 0$):

$$\begin{aligned} \underset{c_1, c_2}{Max} \quad & u(c_1, c_2) = \alpha \ln(c_1 - \underline{c}) + (1 - \alpha) \ln c_2 \\ \text{s.t.} \quad & G(c_1, c_2) = w - p_1 c_1 - p_2 c_2 = 0 \end{aligned}$$

- (1) 写出上述问题的解条件方程。
- (2) 消费者应该如何决策？
- (3) 如果 \underline{c} 是食品的最低消费，上述选择是否符合恩格尔定律？
- (4) 你觉得这个模型能否用来预测一个国家经济增长过程中产业结构的变化？

2. 消费—储蓄决策

在一个两期的OLG (overlapping generation) 模型中, 假定一生可以分为年轻 y 和年老 o 两期, 个人做出消费—储蓄决策, 以最大化一生的总效用:

$$\begin{aligned} \text{Max } U &= u(c^y) + \beta u(c^o) \\ \text{s.t. } c^y + s &= w^y = 1 \\ c^o &= (1+r)s = Rs \end{aligned}$$

其中: $\beta \in (0, 1)$ 为时间贴现率, $w^y = 1$ 为正规化的年轻时的收入, r 为外生给定的利率水平。请回答以下问题:

- (1) 写出模型的一阶条件;
- (2) 假设有 CRRA 形式的效用函数 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, 其中相对风险规避系数 $\gamma > 1$ 。求出 c^y 和 s , 分析影响储蓄率的因素。

3. 生产函数与收入分配

给定利率和工资水平 w, r ，假定企业的产品价格正规化为 $P = 1$ ，最优化问题为 ($\rho < 1, 0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} \underset{K, L}{Max} \quad & \Pi = Y - rK - wL \\ \text{s.t.} \quad & Y = A[\alpha K^\rho + (1 - \alpha)L^\rho]^{1/\rho} \end{aligned}$$

(1) 写出以下人均形式的最优化问题的解条件方程 ($x = \frac{X}{L}$):

$$\begin{aligned} \underset{k}{Max} \quad & \pi = y - rk - w \\ \text{s.t.} \quad & y = A[\alpha k^\rho + 1 - \alpha]^{1/\rho} \end{aligned}$$

(2) 企业的最优人均资本存量是多少？

3. 生产函数与收入分配（续）

- (3) 当 $0 < \rho < 1$ 时，资本收入占比 $s_K \equiv \frac{rK}{Y} = \frac{rk}{y}$ 会受到哪些因素的影响？
- (4) 根据下面要素替代弹性的定义（其中 $MP_x \equiv \frac{dY}{dx}$, $(x = K, L)$ 为要素的边际产出）：

$$\sigma \equiv - \frac{d \ln \left(\frac{K}{L} \right)}{d \ln \left(\frac{MP_K}{MP_L} \right)}$$

证明对 CES 生产函数而言，有 $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ 。

- (5) 解释结果 (3) 的经济含义。