图论

王智慧
复旦大学计算机学院

欧拉图与哈密顿图

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 最短路问题与货郎担问题

欧拉图的定义

定义：通过图中所有边一次且仅一次行遍图中所有顶点的通路称为欧拉通路;通过图中所有边一次且仅一次行遍图中所有顶点的回路称为欧拉回路;

具有欧拉回路的图称为欧拉图;具有欧拉通路，但无欧拉回路的图称为半欧拉图.

规定：平凡图(N_1)是欧拉图。

定义：经过所有顶点的通路称为生成通路.

说明：欧拉图是图中经过所有边的简单的生成通路;
欧拉回路是经过所有边的简单的生成回路.

欧拉图的判别(无向图)

定理：无向图G是欧拉图，当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点.

证明：若G是平凡图，结论显然成立. 下面假设G为非平凡图.

设$G = <V, E>$是含有m条边的n阶非平凡无向图，其中：$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$。

(必要性.)

因为G为欧拉图，所以G中存在欧拉回路。设C是G中的欧拉回路，$\forall v_i, v_j \in V$，v_i, v_j都在C上，因此，v_i和v_j是连通的，所以G为连通图.

又$\forall v_i \in V$，v_i在C上每出现一次获得2度。若出现k次就获得2k度，即：$d(v_i) = 2k$，所以，G中无奇度顶点。

欧拉图的判别(无向图)

定理：无向图G是欧拉图，当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点.

证明：(续)

(充分性.)

由G为非平凡的连通图可知，G中边数$m \geq 1$。对m作归纳。

(1) $m = 1$时，由G的连通性和无奇度顶点可知，G只能是一个环，因此，G为欧拉图。

(2) 设$m \leq k(k \geq 1)$时，结论成立．要证明$m = K+1$时，结论也成立。

由G的连通性和无奇度顶点可知：$\delta(G) \geq 2$。又由扩大路径法可以证明G中存在长度大于或等于3的圈。

设C为G中一个圈，删除C上的全部边，得G的生成子图G’。设G’有s个连通分支$G'_1, G'_2, \ldots, G'_s$，每个连通分支至多有k条边，且无奇度顶点，并且设G'_i与C的公共顶点为$v_{j_i}^*(i = 1..s)$。

欧拉图的判别(无向图)

定理：无向图G是欧拉图，当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点.

证明：(续)

(充分性.) 由归纳假设可知：$G'_1, G'_2, \ldots, G'_s$都是欧拉图，因此，都存在欧拉回路$C'_i(i = 1..s)$。

现在将C还原(即将删除的边重新加上)，并从C上的某顶点v_r开始进行遍历，每遇到$v_{j_i}*$，就行遍G'_i中的欧拉回路$C'_i(i=1..s)$，最后，回到v_r，得回路C”: $v_r \ldots v_{j_1}* \ldots v_{j_1}* \ldots v_{j_2}* \ldots v_{j_2}* \ldots v_{j_s}* \ldots v_{j_s}* \ldots v_r$。

此回路C”经过G中每条边一次且仅一次。因此，C”是G中的欧拉回路。

所以，G为欧拉图。

半欧拉图的判别(无向图)

定理：无向图G是半欧拉图，当且仅当G是连通的，且G中恰有两个奇度顶点。

证明：

(必要性)

设G是m条边的n阶无向图。因为G为半欧拉图，因而G中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路)。

设$\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}\ldots v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$为G中一条欧拉通路，$v_{i_0} \neq v_{i_m}$。显然，G是连通性。

$\forall v \in V(G)$，若v不在Γ的端点出现，显然d(v)为偶数；若v在端点出现过，则d(v)为奇数.

因为Γ只有两个端点且不同，所以 G中只有两个奇数顶点。

半欧拉图的判别(无向图)

定理：无向图G是半欧拉图，当且仅当G是连通的，且G中恰有两个奇度顶点。

证明：(续)

(充分性)

设G的两个奇度顶点分别为u_0和v_0。对G加新边(u_0, v_0)，得$G' = G \cup (u_0, v_0)$，则G'是连通的且无奇度顶点的图。

由前述定理可知，G'为欧拉图。因此，存在欧拉回路C，故，$C - (u_0, v_0)$为G中一条欧拉通路。

所以，G为半欧拉图。

半欧拉图的判别(有向图)

定理：有向图D是欧拉图，当且仅当D是强连通的，且每个顶点的入度都等于出度。

定理：有向图D是半欧拉图，当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度。

定理：G是非平凡的欧拉图，当且仅当G是连通的，且是若干个边不重的圈之并。

欧拉图的性质: 例子

例: 设G是非平凡的且非环的欧拉图, 证明:

(1) $\lambda(G) \geq 2$

(2) $\forall u, v \in V(G), u \neq v$, 则G中都存在包含u和v的简单回路

证明:

(1) 由G是欧拉图, 可知 $\forall e \in E(G)$, 存在圈C: e在C中。因此, $p(G-e) = p(G)$, 所以, e不是桥。由e的任意性可知: $\lambda(G) \geq 2$, 即G是2边-连通图。

(2) $\forall u, v \in V(G), u \neq v$, 由G的连通性可知: u和v之间必存在路径$\Gamma_1$。

设$G' = G - E(\Gamma_1)$, 则在G'中u与v还必连通, 否则, u与v必处于G'的不同的连通分支中, 这说明Γ_1中存在G中的桥, 这与(1)矛盾。

于是, 在G'中存在u到v的路径Γ_2, 显然Γ_1与Γ_2边不重, 这说明: u和v处于由$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$形成的简单回路上。

Fleury算法

设G为欧拉图，通常情况下，G中存在若干条欧拉回路。下面介绍一种求欧拉回路的算法。

Fleury算法:

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经遍历，按下面方法从

$E(G) - \{ e_1, e_2, \ldots, e_i \}$中选取$e_{i+1}$:

- e_{i+1}与v_i相关联
- e_{i+1}不应取$G_i = G - \{ e_1, e_2, \ldots, e_i \}$中的桥，除非无其它边可供行遍

(3) 重复步骤(2)，直到步骤(2)不能再进行为止。

可证明：当算法停止时，所得简单回路$P_m = v_0e_1v_1 e_2 \ldots e_mv_m(v_m=v_0)$为G中一条欧拉回路。

“一笔画”问题

Fleury算法反映了欧拉图能“一笔画出”, 这就是我们称之为“一笔画”的问题。

一个图能一笔画出是指从图某一点出发, 线可以相交, 但不能重合地将该图画完的问题。(终点与始点重合的对应欧拉图,不重合的对应半欧拉图)

哈密顿图的定义

定义:

经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路;

经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路;

具有哈密顿回路的图称为哈密顿图;

具有哈密顿通路,但不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图。

规定:

平凡图是哈密顿图

关于哈密顿图的说明

由定义可知: 哈密顿通路是图中生成初级通路, 哈密顿回路是生成初级回路。

判断一个图是否为哈密顿图, 就是判断能否将图中所有顶点都放置在一个初级回路上。目前还没有找到 哈密顿图简单的充分必要条件。

下面给出的定理都是 哈密顿通路(回路)的必要条件或充分条件。

相关定理

定理：设哈密顿图$G = <V, E>$，对于$\forall V_1 \subset V$，且$V_1 \neq \phi$，均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1|,$$ 其中，$p(G - V_1)$为$G-V_1$的连通分支数。

证明：

设C为G中任意一条哈密顿回路。

当V_1中顶点在C上均不相邻时，$p(C-V_1)$达到最大值$|V_1|$；

当V_1中顶点在C上有彼此相邻的情况时，均有：

$$p(C-V_1) < |V_1|。$$

所以，有 $p(C-V_1) \leq |V_1|$。

而C是G的生成子图，所以有

$$p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|。$$

说明：

该定理只是哈密顿图的必要条件，不是充分条件。

相关定理

推论：设半哈密顿图G = <V, E>, 对于任意$V_1 \subset V$, 且$V_1 \neq \phi$, 均有：
$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$。

证明：设P是G中起于u终于v的哈密顿通路。

令$G' = G \cup (u, v)$(在G的顶点u,v之间加新边)。显然, G'为哈密顿图。

由前述定理可知 $p(G'-V_1) \leq |V_1|$。

于是, 有 $p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v)) \leq p(G'-V_1)+1 \leq |V_1|+1$。

相关定理

一般情况下，二部图$G = <V_1, V_2, E>$，$|V_1| \le |V_2|$，且$|V_1| \ge 2$，$|V_2| \ge 2$。由前述定理及其推论可得出下面结论：

- 若G是哈密顿图，则$|V_1| = |V_2|$
- 若G是半哈密顿图，则$|V_2| = |V_1| + 1$
- 若$|V_2| \ge |V_1| + 2$，则G不是哈密顿图，也不是半哈密顿图

相关定理

定理：设G是n阶无向简单图，若$\forall v_i, v_j \in V(G)$, $(v_i, v_j) \notin E(G)$, 均有：

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$$，则G中存在哈密顿通路。

相关定理

推论: 设G为$n(n \geq 3)$阶无向简单图, 若$\forall v_i, v_j \in V(G), (v_i, v_j) \notin E(G)$, 均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$, 则G是哈密顿图。

证明:

由前述定理, 可知 G中存在哈密顿通路。

设$\Gamma = v_1v_2\ldots v_n$为G中一条哈密顿通路。

1) 若v_1与v_n相邻. 令边$e = (v_1, v_n)$, 则$\Gamma \cup \{ e \}$为G中哈密顿回路。

2) 若v_1与v_n不相邻. 根据条件"$d(v_i)+d(v_j) \geq n$"和前述定理证明方法中的(2), 可类似证明 存在过Γ上各顶点的圈, 此圈即为 G中的哈密顿回路。

所以, G是哈密顿图。

相关定理

定理：设u和v为n阶无向图G中两个不相邻的顶点，且d(u)+d(v) ≥ n，则G为哈密顿图当且仅当G∪(u,v)为哈密顿图。

相关定理

定理：若D为$n(n \geq 2)$阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路。

证明：对n作归纳法。

当$n = 2$时，D的基图为K_2，结论成立。

假设当$n = k$时，结论成立. 现在考察$n=k+1$的情况. 设$V(D) = \{ v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1} \}$。令$D_1 = D - v_{k+1}$，显然，$D_1$为k阶竞赛图。由归纳假设可知$D_1$存在哈密顿通路。不妨假设：$\Gamma_1=v'_1v'_2\ldots v'_k$是一条哈密顿通路。下面证明：$v_{k+1}$可扩到$\Gamma_1$中。

若存在$v'_r(1 \leq r \leq k)$，有$<v'_i,v_{k+1}>\in E(D)$ $(i = 1..r-1)$，$<v_{k+1},v'_r>\in E(D)$，则$\Gamma = v'_1v'_2\ldots v'_{r-1}v_{k+1}v'_r\ldots v'_k$为D中哈密顿通路。

否则，$\forall i \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$，均有$<v'_i, v_{k+1}> \in E(D)$，则$\Gamma = \Gamma' \cup <v'_k, v_{k+1}>$为D中哈密顿通路。

哈密顿图的应用

例：假设有8位来自不同国家的人参加某此国际会议的预备会议。已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个，与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使任何人都能与两边的人交谈。

解：

设8个人分别为$v_1, v_2, \ldots, v_8$，作无向简单图G = <V, E>，其中：$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_8 \}$。$\forall v_i, v_j \in V$, $i \neq j$，若v_i与v_j有共同语言，作无向边(v_i, v_j)，由此可得到边集合E，则G为8阶无向简单图。

$\forall v_i \in V$, $d(v_i)$为与v_i有共同语言的人数。由已知条件可知：$\forall v_i, v_j \in V$且$(v_i, v_j) \notin E(G)$，均有：$d(v_i)+d(v_j) \geq 8$。

由前述定理的推论可知：G中存在哈密顿回路。设$C = v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_8}v_{i_1}$为G的一条哈密顿回路，按这条回路的顺序安排座次即可。

带权图

定义：给定图$G = <V, E>$(G为无向图或有向图)，设$W: E \to R$(R为实数集)，对$\forall e = (v_i, v_j)(<v_i, v_j>) \in E(G)$，设$W(e) = w_{ij}$，称实数$w_{ij}$为边e上的权(Weight)，并将$w_{ij}$标注在边e上，称G为带权图。通常将带权图G记作$<V, E, W>$，称$\Sigma_{e \in E(G)} W(e)$为G的权，记作$W(G)$.

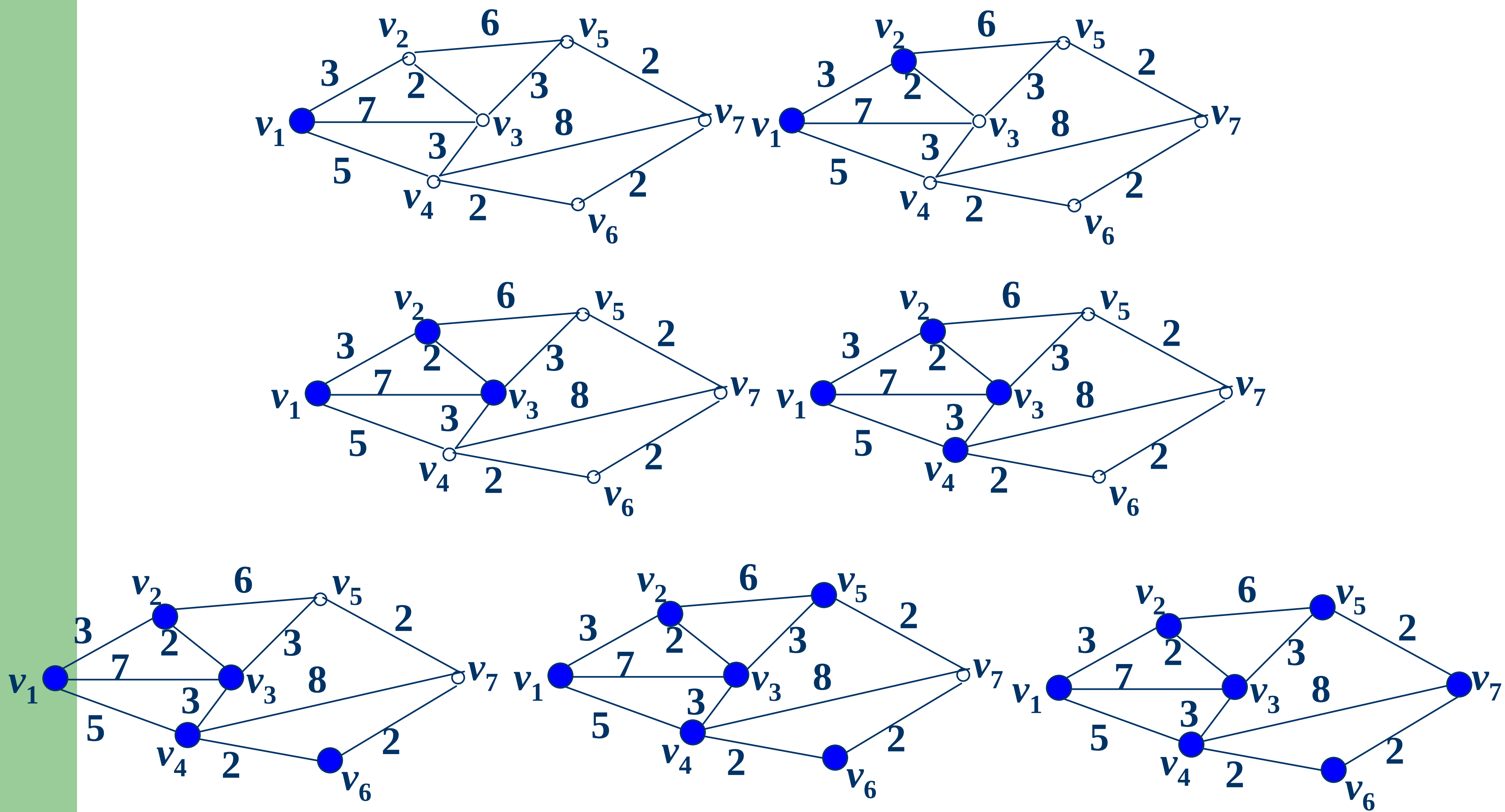
定义：设带权图$G = <V, E, W>$(G为无向图或有向图)，其中每一条边的权为非负实数. $\forall u, v \in V$，当u和v连通(u可达v)时，称从u到v长度最短的路径为从u到v的最短路径，称其长度为从u到v的距离，记作$d(u,v)$. 约定：$d(u,u)=0$；当u和v不连通(u不可达v)时，$d(u,v)=+\infty$.

最短路问题

- 最短路问题
  - 给定带权图G = <V, E, W>以及顶点u和v,其中每一条边e的权W(e)为非负实数,求从u到v的最短路径

- Dijkstra算法
  - 逐点求出单个源点到其他各点的最短路径及其距离
  - 依据性质: 最短路径的任一段子路径也是最短路径
  - 算法步骤
    - 设带权图G = <V, E, W>, 源点为v_1, 令S={v_1}
    - 选取顶点v', 使得v'是从v_1到V-S中所有顶点的路径长度最短的一个顶点, 将v'加入到S中
    - 重复上一步, 直至从v_1出发可以到达的所有顶点都在S中

Dijkstra算法: 例子



货郎担问题

设有n个城市，城市之间有道路，道路的长度均大于或等于0，可能是∞(表示城市之间无交通线)。

一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问如何才能使他所走的路线最短？这就是著名的旅行商问题或货郎担问题。

货郎担问题可化归为如下图论问题：

设$G = \langle V, E, W \rangle$为一个n阶完全带权图$K_n$，各边的权非负，且有些边的权可能为∞。求G中一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型。

注意：

在货郎担问题中，不同哈密顿回路的含义．即，不考虑始点和终点的区别，以及顺时针与逆时针行遍的区别．

货郎担问题: 计算量

在n阶完全带权图中, 共存在(n-1)!/2种不同的哈密顿回路, 经过比较可找出其最短的哈密顿回路。

当n=4时, 有3种不同的哈密顿回路

当n=5时, 有12种不同的哈密顿回路

当n=6时, 有60种不同的哈密顿回路

…

当n=11时, 有5 × 9! = 1,814,400种不同的哈密顿回路

…

由此可见: 货郎担问题的计算量是非常大的。

对于货郎担问题, 人们一方面在寻找好的算法, 另一方面也在寻找各种近似算法(用较低的计算代价找到次优的回路)。