图论

王智慧
复旦大学计算机学院

图的基本概念

- 图的概念
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 图的运算

无序积, 多重集

定义：设A和B为任意的两个集合，称$\{ \{a, b\} \mid a\in A, b\in B \}$为A与B的无序积，记做A&B.

定义：元素可以重复出现的集合 称为多重集, 其中某元素重复出现的次数称为该元素的重复度.

例如: {a, a, b}为一个多重集, 其中元素a的重复度为2, 元素b的重复度为1.

无向图与有向图的概念

定义：一个无向图是一个有序的二元组 G = <V, E>, 其中

(1) $V \neq \phi$称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;

(2) E称为边集, $E = \{ (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \}$是无序积V&V的多重子集, 其中$(v_i, v_j)$称为无向边(或简称边).

定义：一个有向图是一个有序的二元组 D = <V, E>, 其中:

(1) $V \neq \phi$称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;

(2) E称为边集, $E = \{ <v_i, v_j> \mid v_i, v_j \in V \}$是笛卡儿积$V \times V$的多重子集, 其中$<v_i, v_j>$称为有向边.

通常情况下, 无向图和有向图都可以用图形来直观表示, 即: 用小圆圈(或实心点)表示顶点, 用顶点之间的连线表示无向边, 用有方向的连线表示有向边.

基本概念

- 在图的定义中, 有时也用G来泛指图(包括无向图和有向图), 用V(G)和E(G)分别表示图G的顶点集和边集;

- |V(G)|和|E(G)|分别表示图G的顶点数和边数. 如果|V(G)| = n, 则称G为**n阶图**; 若|V(G)|与|E(G)|均为有限数, 则称G为**有限图**.

- 在图G中, 如果边集E(G) = ϕ, 则称G为**零图**; 此时, 若G为n阶图, 则称G为**n阶零图**, 记作N_n; 特别地, 称N_1为**平凡图**.

基本概念

- 在图的定义中, 我们规定顶点集V为非空集, 但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果, 为此规定顶点集为空集的图为空图, 并将空图记为∅.
- 在将图的集合定义转化成图形表示之后, 常用e_k表示无向边(v_i, v_j)(或有向边$<v_i, v_j>$), 称顶点或边用字母标定的图为标定图, 否则, 称为非标定图.
- 将有向图各有向边改成无向边后的无向图称为原来图的基图.

基本概念

- 设$G = <V, E>$为无向图, $e_k = (v_i, v_j) \in E$, 则称v_i, v_j为e_k的端点, e_k与v_i或e_k与v_j是彼此相关联的;
- 若$v_i \neq v_j$, 则称e_k与v_i或e_k与v_j的关联次数为1; 若$v_i = v_j$, 则称e_k与v_i的关联次数为2, 并称e_k为环; $\forall v_s \in V$, 若$v_s \neq v_i$且$v_s \neq v_j$, 则称e_k与v_s的关联次数为0;
- 设$D = <V, E>$为有向图, $e_k = <v_i, v_j> \in E$, 称v_i, v_j为e_k的端点; 若$v_i = v_j$, 则称e_k为D中的环;
- 无论在无向图中还是有向图中, 无边关联的顶点称为孤立点.

基本概念

- 设无向图$G = <V, E>$, $v_i, v_j \in V$, $e_k, e_s \in E$. 若$\exists e_t \in E$, 使得 $e_t = (v_i, v_j)$, 则称v_i与v_j是相邻的. 若e_k与e_s至少有一个公共端点, 则称e_k与e_s是相邻的。

- 设有向图$D = <V, E>$, $v_i, v_j \in V$, $e_k, e_s \in E$. 若$e_t \in E$, 使得 $e_t = <v_i, v_j>$, 则称v_i为e_t的始点, v_j为e_t的终点, 并称v_i邻接到v_j, v_j邻接于v_i. 若e_k的终点为e_s的始点, 则称e_k与e_s相邻。

基本概念

- 设无向图$G = \langle V, E\rangle$, $\forall v \in V$, 称$\{ u \mid u \in V \wedge (u, v) \in E \wedge u \neq v \}$为v的邻域, 记做$N_G(v)$; 称$N_G(v) \cup \{ v \}$为v的闭邻域, 记做$\overline{N}_G(v)$; 称$\{ e \mid e \in E \wedge e$与v相关联$\}$为v的关联集, 记做$I_G(v)$

- 设有向图$D = \langle V, E\rangle$, $\forall v \in V$, 称$\{ u \mid u \in V \wedge \langle v, u\rangle \in E \wedge u \neq v \}$为v的后继元集, 记做$\Gamma^+_D(v)$; 称$\{ u \mid u \in V \wedge \langle u, v\rangle \in E \wedge u \neq v \}$为v的先驱元集, 记做$\Gamma^-_D(v)$; 称$\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$为v的邻域, 记做$N_D(v)$; 称$N_D(v) \cup \{ v \}$为v的闭邻域, 记做$\overline{N}_D(v)$

平行边, 多重图, 简单图

定义:

- 在无向图中, 若关联一对顶点的无向边多于1条, 则称这些边为平行边, 平行边的条数称为重数.
- 在有向图中, 若关联一对顶点的有向边多于1条, 并且这些边的起点与终点相同(即边的方向相同), 则称这些边为平行边.
- 含平行边的图称为多重图; 既不含平行边, 也不含环的图称为简单图.

图的度数

定义:

- 设$G = \langle V, E\rangle$为一无向图, $\forall v \in V$, 称v作为边的端点次数之和为v的度数, 简称为度, 记做 $d_G(v)$, 在不发生混淆时, 简记为$d(v)$;
- 设$D = \langle V, E\rangle$为有向图, $\forall v \in V$, 称v作为边的始点次数之和为v的出度,记做$d^+_D(v)$, 简记作$d^+(v)$; 称v作为边的终点次数之和为v的入度, 记做$d^-_D(v)$, 简记作$d^-(v)$; 称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数, 记做$d(v)$.

图的度数

定义:

- 设G = <V, E>为一无向图, 令$\Delta(G)=\max\{d(v)|v\in V(G)\}$, $\delta(G) = \min\{d(v)|v\in V(G)\}$, 称$\Delta(G)$, $\delta(G)$分别为G的最大度和最小度.
- 设D = <V, E>为有向图, 在有向图D中, 类似可定义最大度$\Delta(G)$和最小度$\delta(G)$. 另外, 令$\Delta^+(G)=\max\{d^+(v)|v\in V(G)\}$, $\delta^+(G)=\min\{d^+(v)|v\in V(G)\}$, $\Delta^-(G)=\max\{d^-(v)|v\in V(G)\}$, $\delta^-(G)=\min\{d^-(v)|v\in V(G)\}$, 分别称为D的最大出度, 最小出度, 最大入度,最小入度.
- 当不会引起混淆时, 以上记号可分别简记为Δ, δ, Δ^+, δ^+, Δ^-, δ^-.
- 此外, 称度数为1的顶点为悬挂顶点, 与它关联的边称为悬挂边. 度数为偶数(奇数)的顶点称为偶度(奇度)顶点.

握手定理

定理：设G = <V, E>为任意无向图，$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $|E| = m$,

则$\Sigma_{i=1..n} d(v_i) = 2m$。

证明：G中每条边(包括环)均有两个端点，在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，所以，m条边共提供2m度。

定理：设D = <V, E>为任意有向图，$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $|E| = m$,

则$\Sigma_{i=1..n} d(v_i) = 2m$, $\Sigma_{i=1..n} d^+(v_i) = \Sigma_{i=1..n} d^-(v_i) = m$

该定理的证明与上面的定理类似.

握手定理

握手定理的推论:

任何图(无向的或有向的)中, 奇度顶点的个数是偶数。

证明: 设$G = \langle V, E\rangle$为任意图, 令

$$V_1 = \{ v \mid v\in V, d(v)\text{为奇数} \}, V_2 = \{ v \mid v\in V, d(v)\text{为偶数} \}$$

则 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \phi$。

由握手定理可知:

$$2m = \Sigma_{v\in V}d(v) = \Sigma_{v\in V_1}d(v) + \Sigma_{v\in V_2}d(v)$$

由"$2m$和$\Sigma_{v\in V_2}d(v)$均为偶数"可知 $\Sigma_{v\in V_1}d(v)$也为偶数。

因为V_1中各顶点的度数都为奇数, 所以 $|V_1|$必为偶数。

度数列

设$G = <V, E>$为一个n阶无向图, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, 称$d(v_1)$, $d(v_2)$, …, $d(v_n)$为G的度数列. 对于顶点标定的无向图, 它的度数列是唯一的。

设$D = <V, E>$为一个n阶有向图, $V = \{ v_1,v_2, \ldots, v_n \}$, 称$d(v_1)$, $d(v_2)$, …, $d(v_n)$为D的度数列, 称$d^+(v_1)$, $d^+(v_2)$, …, $d^+(v_n)$与$d^-(v_1)$, $d^-(v_2)$, …, $d^-(v_n)$分别为D的出度列和入度列。

可图化

对于给定的非负整数列$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, 若存在以$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$为顶点集的n阶无向图G, 使得$d(v_i) = d_i$, 则称d是可图化的。

特别地, 若所得图是简单图, 则称d是可简单图化的。

给定 非负整数列$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, 如何判断其是否可图化的? 可以使用下列定理.

定理: 设非负整数列$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, 则d是可图化的, 当且仅当

$$\Sigma_{i=1..n} d_i = 0 \pmod 2) .$$

可图化

定理：设非负整数列$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$，则d是可图化的，当且仅当$\Sigma_{i=1..n} d_i = 0 \pmod 2$.

证明：由握手定理可知：必要条件是显然的。

下面证明其充分性。由已知条件可知：d中有$2k(0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor)$个奇数。不妨设这些奇数为：$d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_{2k}$。做出n阶无向图$G = \langle V, E \rangle$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$的方法如下：

首先，在顶点v_r与v_{r+k}之间连边$(r = 1..k)$;

若d_i为偶数，令$d'_i = d_i$; 若d_i为奇数，令$d'_i = d_i - 1$，得$d'=(d'_1,d'_2,\ldots, d'_n)$，其中$d'_i$均为偶数.

再在v_i处做出$d_i'/2$条环$(i = 1..n)$，将所得各边集合在一起组成E，则G的度数列为d.

可图化

定理：设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G) \le n-1$。

证明：因为G是简单图，所以G中无平行边，也无环。这样，G中任何顶点v至多与其余n-1个顶点相邻，即$d(v) \le n-1$。由v的任意性可知：$\Delta(G) \le n-1$。

图的同构

定义：设$G_1=<V_1, E_1>$, $G_2=<V_2, E_2>$为两个无向图(两个有向图)。若存在双射函数$f: V_1 \rightarrow V_2$, 对于$v_i, v_j \in V_1$, $(v_i, v_j) \in E_1$($<v_i, v_j> \in E_1$), 当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$($<f(v_i), f(v_j)> \in E_2$), 并且(v_i, v_j) ($<v_i, v_j>$)与$(f(v_i), f(v_j))$($<f(v_i), f(v_j)>$)的重数相同，则称**G_1与G_2是同构的(Isomorphic)**，记作：$G_1 \cong G_2$.

图的同构

图之间的同构关系$\cong$可看成全体图集合上的二元关系，该二元关系是自反、对称和传递的，因此，它是等价关系。

在同构关系的每个等价类中取一个非标定图作为其代表，凡与它同构的图，在同构含义下都可看成一个图。

图的同构

说明:

- 注意: 不要将两个图同构的必要条件当成充分条件. 若$G_1 \cong G_2$, 则它们的阶数、边数和度数列等都相同。若不满足这些条件之一, 则两个图肯定不同构; 但是, 若满足这些条件, 两个图也不一定同构。

完全图

定义：设G为n阶无向简单图，若G中每个顶点均与其余的n-1个顶点相邻，则称G为n阶无向完全图(Complete Graph)，简称n阶完全图，记做$K_n(n \geq 1)$;

设D为n阶有向简单图，若D中每个顶点都邻接到其余的n-1个顶点，又邻接于其余的n-1个顶点，则称D是n阶有向完全图；

设D为n阶有向简单图，若D的基图为n阶无向完全图K_n，则称D是n阶竞赛图。

k-正则图

定义: 设G为n阶无向简单图, 若$\forall v \in V(G)$, 均有$d(v) = k$, 则称G为 ***k*-正则图**。

n阶零图是0-正则图, n阶无向完全图是(n-1)-正则图, 彼得松图是3-正则图。

由握手定理可知: n阶k-正则图中, 边数$m = kn/2$。所以, 当k为奇数时, n必为偶数。

子图

定义:

设G = <V, E>, G' = <V', E'>为两个图(同为无向图或有向图), 若V' $\subseteq$ V且E' $\subseteq$ E, 则称G'是G的子图(Subgraph), G为G'的母图, 记作 G' $\subseteq$ G;

若V' $\subset$ V或E' $\subset$ E, 则称G'为G的真子图; 若V' = V, 则称G'为G的生成子图。

导出子图

定义:

设图$G = \langle V, E\rangle$, 如果$V_1 \subset V$, $V_1 \neq \varnothing$, 称以V_1为顶点集, 以G中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图为**G的V_1导出的子图**, 记作$G[V_1]$;

设图$G = \langle V, E\rangle$, 如果$E_1 \subset E$, $E_1 \neq \varnothing$, 称以E_1为边集, 以E_1中边关联的顶点为顶点集V_1的图为**G的E_1导出的子图**，记作$G[E_1]$。

补图

定义：设$G = <V, E>$为n阶简单无向图，以V为顶点集，以使G成为完全图K_n的所有添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图(Complement Graph)，记做$\overline{G}$。若图$G \cong \overline{G}$，则称G是自补图。

图的变化

定义：设$G = \langle V, E \rangle$为无向图，

(1) 设$e \in E$, 用$G - e$表示从G中去掉边e, 称为删除边e。又设$E' \subset E$, 用$G - E'$表示从G中删除E'中的所有边, 称为删除E '；

(2) 设$v \in V$, 用$G - v$表示从G中去掉v及其所关联的一切边, 称为删除顶点v；设$V' \subset V$, 用$G - V'$表示从G删除V'中所有顶点及其所关联的边，称为删除V'；

(3) 设边$e = (u, v) \in E$, 用$G \backslash e$表示从G中删除e, 并将端点u, v用一个新的顶点w(或用u或v充当w)来代替, 使w关联e以外u, v关联的所有边, 称为边e的收缩；

(4) 设$u, v \in V$(u, v可能相邻, 也可能不相邻), 用$G \cup (u, v)$(或$G + (u, v)$)表示在u, v之间加一条边(u, v), 称为新加边。

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边。

通路与回路

定义：设G为无向标定图，G中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_{i_0}\ e_{j_1}\ v_{i_1}\ e_{j_2}\ \ldots\ e_{j_s}\ v_{i_s}$ 称为 v_{i_0} 到 v_{i_s} 的通路；其中，$v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$ 为 e_{j_r} 的端点，$r = 1..s$。

- v_{i_0} 和 v_{i_s} 分别称为Γ的始点与终点；
- Γ中边数称为它的长度；
- 若 $v_{i_0} = v_{i_s}$，则称通路为回路；
- 若Γ的所有边都不相同，则称Γ为简单通路；此时若 $v_{i_0} = v_{i_s}$，则称Γ为简单回路；
- 若Γ的所有顶点(除端点外)都不相同，所有边也都不同，则称Γ为初级通路或路径；此时若 $v_{i_0} = v_{i_s}$，则称Γ为初级回路或圈；长度为奇数(偶数)的圈称为奇圈(偶圈)；
- 若Γ中有边重复出现，则称Γ为复杂通路；此时若 $v_{i_0} = v_{i_s}$，则称Γ为复杂回路.

通路与回路

注意:

- 在上述定义中, 回路是通路的特殊情况, 即回路也是通路, 初级通路(回路)是简单通路(回路), 但反之不真;
- 在有向图中, 通路、回路的相关定义与上述无向图中类似, 只是要注意有向边方向的一致性;
- 为了写出非标定图中的通路(或回路), 可以先将非标定图标成标定图, 再写出通路(或回路).

通路与回路

除了用上述顶点与边的交替序列来定义通路和回路, 还可用更简单的表示法来表示通路和回路:

- 用边的序列表示通路(回路), Γ可表示成 $\Gamma = e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_s}$
- 在简单图中也可用顶点序列表示通路(回路), Γ也可表示成 $\Gamma = v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_s}$

通路与回路

定理: 在n阶图G中, 若从顶点v_i到v_j($v_i \neq v_j$)存在通路, 则从v_i到v_j存在长度小于或等于(n-1)的通路。

证明: 设$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_tv_t$($v_0=v_i$, $v_t=v_j$)为G中一条长度为t的通路 .

当$t \leq n-1$时, 则Γ满足要求;

当$t > n-1$, 由于Γ上的顶点数多于G中的顶点数, 必存在$0 \leq k<s \leq t$, 使得$v_s = v_k$, 即在Γ上存在v_s到v_k的回路C_{sk}。在Γ上删除C_{sk}中的所有边和除v_s外的所有顶点, 可得$\Gamma' = v_0e_1v_1e_2\ldots v_se_{s+1}\ldots e_{t'}v_{t'}$。此时, Γ'仍为$v_i$到$v_j$的通路, 且长度t'至少比Γ的长度少1。若Γ'的长度t'仍然大于n-1, 则重复上述过程。

由于G是有限图, 经过有限步后, 必得到从v_i到v_j长度小于或等于n-1的通路。

通路与回路

推论：在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j($v_i \neq v_j$)存在通路，则v_i到v_j一定存在长度小于或等于n-1的初级通路(路径)。

定理：在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路。

推论：在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的初级回路。

通路与回路

例：无向完全图$K_n(n \geq 3)$中有多少种非同构的圈？

解：

由于长度相同的圈都是同构的(因为可以构造相应的双射)，所以只有长度不同的圈才是非同构的。

而$K_n(n \geq 3)$中圈的长度只能有 3, 4, …, n, 因此, K_n中最多只有n-2种非同构的圈。

在同构意义下，给定长度的圈只有一个。在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列。如果只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈在定义意义下不同。

通路与回路

例：无向完全图K_3的顶点依次标定为a, b和c。在定义意义下K_3中有多少个不同的圈？

解: 在同构意义下，K_3中只有一个长度为3的圈。但在定义意义下，不同起点(终点)的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也是不同的。因此，K_3中有6个不同的长为3的圈: abca, acba, bacb, bcab, cabc和cbac。

如果只考虑起点(终点)的差异，而不考虑顺时针逆时针的差异，那么仅有3种不同的圈。

无向图的连通性

定义: 设无向图G = <V, E>, $\forall u, v \in V$, 若u与v之间存在通路, 则称u和v是连通的, 记作: $u \sim v$; $\forall v \in V$, 规定: $v \sim v$;

无向图中顶点之间的连通关系~可以做如下解释:

$$\sim = \{ (u, v) \mid u,v \in V, u\text{与}v\text{之间有通路} \}$$

显然, ~是自反、对称和传递的, 所以, ~是V上的等价关系。

定义: 若无向图G是平凡图或G中任何两顶点都是连通的, 则称G为连通图, 否则称G是非连通图或分离图。

例如: 完全图$K_n (n \geq 1)$是连通图, 而零图$N_n (n \geq 2)$是分离图。

连通分支

定义：设无向图$G = <V, E>$，V关于顶点之间的连通关系~的商集$V/\sim = \{ V_1, V_2, \ldots, V_k \}$，$V_i$为等价类，称导出子图$G[V_i]$ $(i = 1..k)$为G的**连通分支**；连通分支数k，常记为 $p(G)$。

根据定义可知：

- 若G为连通图，则$p(G) = 1$；
- 若G为非连通图，则$p(G) \geq 2$；
- 在所有的n阶无向图中，n阶零图是连通分支最多的，$p(N_n) = n$。

点之间的距离

定义: 设u, v为无向图G中任意两个顶点, 若u ~ v, 称u和v之间长度最短的通路为u和v之间的**短程线**; 短程线的长度称为u和v之间的**距离**, 记作d(u, v). 当u和v不连通时, 规定d(u, v) = ∞。

距离具有以下性质:

- $d(u, v) \geq 0$, 当$u = v$时, 等号成立;
- 对称性, $d(u, v) = d(v, u)$;
- 满足三角不等式:

  $\forall u,v,w \in V(G)$, 则$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$
- $\forall u,v \in V(K_n)(n \geq 2)$, $d(u, v) = 1$;
- $\forall u,v \in V(N_n)(n \geq 2)$, $d(u, v) = \infty$.

点割集与割点

定义：设无向图$G = \langle V, E \rangle$，若存在$V' \subset V$，且$V' \neq \phi$，使得：

$p(G-V') > p(G)$，而对于任意的$V'' \subset V'$，均有$p(G-V'') = p(G)$，则称V'是G的点割集；若$V' = \{ v \}$(即V为单元集)，则称v为割点。

边割集与割边

定义：设无向图$G = \langle V, E\rangle$, 若存在$E' \subseteq E$, $E' \neq \phi$, 使得$p(G-E') > p(G)$, 而对于任意的$E'' \subset E'$, 都有：$p(G-E'') = p(G)$, 则称E'是G的边割集, 或简称为割集; 若$E' = \{ e \}$(即E'为单元集), 则称e为割边或桥。

点连通度与边连通度

定义：设G为无向连通图且不是完全图，则称 $\kappa(G) = \min\{\, |V'| \mid V'$ 为G的点割集 $\}$ 为G的点连通度，简称连通度。$\kappa(G)$简记为κ (读：kæpə)。

规定：

完全图$K_n(n \geq 1)$的点连通度为n-1；非连通图的点连通度为0.

若$\kappa(G) \geq k > 0$，则称G是k-连通图。

点连通度与边连通度

定义：设G是无向连通图，称$\lambda(G) = \min\{ |E'| \mid E'$是G的边割集$\}$为G的边连通度，$\lambda(G)$也可简记为$\lambda$。

规定：非连通图的边连通度为0. 若$\lambda(G) \geq r$, 则称G是r边-连通图.

若G是r边-连通图，则在G中任意删除r-1条边后所得的图仍是连通的。完全图K_n的边连通度为n-1，因此，K_n是r边-连通图$(0 \leq r \leq n-1)$。

设G_1和G_2都是n阶无向简单图，

- 若$\kappa(G_1) > \kappa(G_2)$，则称$G_1$比$G_2$的点连通程度高
- 若$\lambda(G_1) > \lambda(G_2)$，则称$G_1$比$G_2$的边连通程度高

定理：对于任何无向图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

有向图的连通性

定义：设$D = <V, E>$为有向图，$\forall v_i, v_j \in V$，若从v_i到v_j存在通路，则称v_i可达v_j，记作$v_i \to v_j$。规定v_i总是可达自身的，即：$v_i \to v_i$.若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$，则称v_i与v_j是相互可达的，记作$v_i \leftrightarrow v_j$. 规定$v_i \leftrightarrow v_i$。

注意："$\to$"与"$\leftrightarrow$"都是V上的二元关系，且"$\leftrightarrow$"是V上的等价关系。

定义：设$D = <V, E>$为有向图，$\forall v_i, v_j \in V$，如果$v_i \to v_j$，则称v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线；短程线的长度为v_i到v_j的距离，记作$d<v_i, v_j>$。

注意：与无向图中顶点之间的距离$d(v_i, v_j)$相比，$d<v_i, v_j>$除对称性外，具有$d(v_i, v_j)$所具有的其它性质。

有向图的连通性

定义：设D = <V, E>为**有向图**。若D的基图是连通图, 则称D是**弱连通图**, 简称为**连通图**；若$\forall v_i, v_j \in V$, $v_i \to v_j$与$v_j \to v_i$至少其一成立, 则称D是**单向连通图**；若均有$v_i \leftrightarrow v_j$, 则称D是**强连通图**。

强连通图与单向连通图的判别

定理：设有向图D = <V, E>, V = { v_1, v_2, …, v_n }。D是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路。

证明：充分性显然成立。下面证明必要性。

由D的强连通性可知: $v_i \to v_{i+1}$, i = 1..n-1, 设$\Gamma_i = v_i \to v_{i+1}$. 又因为$v_n \to v_1$, 设$\Gamma_n$为$V_n$到$V_1$的通路, 则$\Gamma_1$, Γ_2, …, Γ_{n-1}, Γ_n所围成的回路经过D中每个顶点至少一次。

定理: 设D是n阶有向图, D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路。

扩大路径法

设G = <V, E>为n阶无向图, $E \neq \phi$, Γ_s为G中一条路径.

若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻, 就将它们扩到通路中, 继续该过程, 直到所通路的端点都不与通路外的顶点相邻为止。

设最后得到的路径为Γ_{s+k}(长度为s的路径扩大成了长度为s+k的路径), 称Γ_{s+k}为"极大路径", 称使用此种方法证明问题的方法为"扩大路径法"。

扩大路径法: 例子

例: 设G为$n(n \geq 4)$阶无向简单图, $\delta(G) \geq 3$, 证明G中存在长度大于或等于4的圈。

证明: 不妨设G是连通图, 否则, 因为G的各连通分支的最小度也都大于等于3, 因而可对它的某个连通分支进行讨论。

设$\forall u, v \in V(G)$. 由于G是连通图, 所以, 存在路径 $u \rightarrow v$. 用"扩大路径法"扩大这条路径$u \rightarrow v$, 将最后得到的"极大路径"记为$\Gamma = v_0v_1\ldots v_l$, 因为$\delta(G) \geq 3$, 所以有$l \geq 3$。

若v_0与v_l相邻, 则$\Gamma \cup (v_0, v_l)$为长度大于等于4的圈;

否则, 由$d(v_0) \geq \delta(G) \geq 3$, 因而$v_0$除与$\Gamma$上的$v_1$相邻外, 还存在$\Gamma$上的顶点$v_k(k \neq 1)$和$v_t(k < t \leq l)$与$v_0$相邻, 则$v_0v_1\ldots v_k\ldots v_tv_0$为一个圈且长度大于或等于4。

二部图

定义:

设$G = \langle V, E \rangle$为无向图, 若将V分成V_1和V_2($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \phi$), 使得$\forall(v_i, v_j) \in E(G)$, 有 $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$, 则称G为二部图(或称二分图, 偶图), 记为$\langle V_1, V_2, E \rangle$. 称$V_1$和$V_2$为互补顶点子集.

若G是简单二部图, V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻, 则称G为完全二部图, 记为$K_{r,s}$, 其中: $r = |V_1|$, $s = |V_2|$。

二部图的判别

定理：无向图G = <V, E>是二部图，当且仅当G中无奇数长度的回路.

证明：(必要性)

若G中无回路，结论显然成立。

若G中有回路，只需证明G中无奇圈。设C为G中任意圈，令C = $v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_s}v_{i_1}$，易知：$s \geq 2$。不妨设$v_{i_1} \in V_1$，则必有$v_{i_s} \in V_2$，于是 s必为偶数，即C为偶圈，由C的任意性可知结论成立。

二部图的判别

定理：无向图G = <V, E>是二部图，当且仅当G中无奇数长度的回路.

证明: (充分性)

设G为连通图，否则，可对每个连通分支进行讨论。设v_0为G中任意一个顶点，令:

$$V_1 = \{ v \mid v \in V(G) \land d(v_0, v) \text{为偶数} \}$$

$$V_2 = \{ v \mid v \in V(G) \land d(v_0, v) \text{为奇数} \}$$

显然有: $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$。

下面将证明: $V_1(V_2)$中任意两顶点都不相邻。

假设 $\exists v_i, v_j \in V_1$, $e = (v_i, v_j) \in E(G)$. 设v_0到v_i, v_j的短程线分别为Γ_i和Γ_j，则它们的长度$d(v_0, v_i)$, $d(v_0, v_j)$都是偶数。显然，$\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup e$中一定含奇圈，这就与已知条件矛盾。所以，$V_1(V_2)$中任意两顶点都不相邻，即G为二部图。

图的矩阵表示

图可用集合来定义,也可用图形来表达,还可以用矩阵来表示。

用矩阵表示图便于用代数的方法研究图的性质,也便于计算机处理图。在用矩阵表示图时,需将图的顶点或边标定顺序,使其成为标定图。

本节将讨论无向(有向)图的关联矩阵,有向图的邻接矩阵和可达矩阵。

无向图的关联矩阵

定义：设无向图$G = \langle V, E \rangle$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_m \}$, 令 m_{ij}为顶点v_i与边e_j的关联次数, 则称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵, 记作M(G)。

无向图关联矩阵的性质

关联矩阵M(G)有以下性质:

- $\Sigma_{i=1..n}m_{ij} = 2\ (j = 1..m)$, 即每列元素之和均为2, 这正说明每条边关联两个顶点;
- $\Sigma_{j=1..m}m_{ij} = d(v_i)$, 即M(G)第i行元素之和为$v_i$的度数, i =1...n;
- $\Sigma_{i=1..n}d(v_i) = \Sigma_{i=1..n}\Sigma_{j=1..m}m_{ij} = \Sigma_{j=1..m}\Sigma_{i=1..n}m_{ij} = \Sigma_{i=1..m}2 = 2m$, 即各顶点度数之和等于边数的2倍, 这个结果正是握手定理的内容;
- 第j列与第k列相同, 当且仅当边e_j与e_k是平行边;
- $\Sigma_{j=1..m}m_{ij} = 0$, 当且仅当$v_i$是孤立点。

有向图的关联矩阵

定义：设有向图D = <V, E>中无环, V = { v_1, v_2, …, v_n }, E = { e_1, e_2, …, e_m }, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0 & v_i\text{为}e_j\text{不关联} \\ -1 & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵, 记作M(D)。

有向图关联矩阵的性质

关联矩阵M(D)有以下性质:

- $\Sigma_{i=1..n}m_{ij} = 0(j = 1..m)$, 从而$\Sigma_{j=1..m}\Sigma_{i=1..n}m_{ij} = 0$, 也即 M(D)中所有元素之和为0;
- M(D)中, "-1"的个数等于"+1"的个数, 都等于边数m, 这是有向图握手定理的内容;
- 第i行中, "+1"的个数等于v_i的出度, "-1"的个数等于 v_i的入度;
- 平行边所对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义：设有向图$D = \langle V, E\rangle$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_m \}$, 令$a_{ij}$为$v_i$邻接到$v_j$边的条数, 称$(a_{ij})_{n\times n}$为D的邻接矩阵, 记作A(D), 简记A。

有向图邻接矩阵的性质

有向图的邻接矩阵有以下性质。

- $\Sigma_{j=1..n}a_{ij} = d^+(v_i)$ $(i = 1..n)$, 即A(D)第i行元素之和为v_i的出度;
- $\Sigma_{i=1..n}a_{ij} = d^-(v_j)$ $(j = 1..n)$, 即A(D)第j列元素之和为v_j的入度;
- $\Sigma_{i=1..n}\Sigma_{j=1..n}a_{ij} = \Sigma_{i=1..n}d^+(v_i) = m$,

  $\Sigma_{j=1..n}\Sigma_{i=1..n}a_{ij} = \Sigma_{j=1..n}d^-(v_j) = m$;

  即反映了有向图握手定理。
- 同时, A(D)中所有元素之和为D中长度为1的通路的个数, 而

  $\Sigma_{i=1..n}a_{ii}$为D中长度为1的回路(环)的个数。

有向图邻接矩阵的性质

如何利用A(D), 计算出D中长度为t的通路数和回路数?
(注: 这里通路是定义意义下的概念, 不同起点的通路看成是不同的, 并且回路看成是通路的特殊情况。)

为了解决提出的问题, 要计算A(D)的幂, 把t次幂记作$A^t(D^t)$或简记作A^t。设$A^t = (a_{ij}^{(t)})_{n\times n}(t \geq 2)$, 其中元素$a_{ij}^{(t)} = a_{ik}^{(t-1)} \times a_{kj}^{(1)}$, 则$a_{ij}^{(t)}$为顶点$v_i$到$v_j$长度为t的通路数, 当i = j时, $a_{ii}^{(t)}$为D中从v_i到v_i长度为t的回路数(这里的回路可是初级的, 简单的, 也可是复杂的).

有向图邻接矩阵的性质

定理：设A为有向图D的邻接矩阵，D的顶点集为$\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$，则$A^t (t \geq 1)$中元素$a_{ij}^{(t)}$为D中$v_i$到$v_j$长度为t的通路数，其中$a_{ii}^{(t)}$是长度为t的回路数；$\Sigma_{i=1..n}\Sigma_{j=1..n}a_{ij}^{(t)}$是D中长度为t的通路总数，其中$\Sigma_{i=1..n}\ a_{ii}^{(t)}$是长度为t的回路总数。

推论：设$B_t = A + A^2 + \ldots + A^t (t \geq 1)$，则$\Sigma_{i=1..n}\Sigma_{j=1..n}b_{ij}^{(t)}$为D中长度小于等于t的通路数，其中$\Sigma_{i=1..n}b_{ii}^{(t)}$为D中长度小于或等于t的回路数。

有向图的可达矩阵

定义: 有向图$D = \langle V, E\rangle$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, 令:

若v_i可达v_j，则$p_{ij} = 1$, 否则，$p_{ij} = 0$;

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作P(D), 简记为P;

注意: 由于$\forall v_i \in V$, $v_i \leftrightarrow v_i$, 所以, P(D)主对角线上的元素全为1。

图的运算

定义: 设$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$为两个图, 若$V_1 \cap V_2 = \phi$, 则称$G_1$与$G_2$是不交的; 若$E_1 \cap E_2 = \phi$, 则称$G_1$与$G_2$是边不交或边不重的

由定义可知, 不交的图必然是边不交的, 但反之不然。

图的运算

定义：设$G_1 = <V_1, E_1>$, $G_2 = <V_2, E_2>$为不含孤立点的两个图，且它们同为无向图或有向图，

- 称以$E_1 \cup E_2$为边集，以$E_1 \cup E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的并图，记作$G_1 \cup G_2$;
- 称以$E_1 - E_2$为边集，以$E_1 - E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的差图，记作$G_1 - G_2$;
- 称以$E_1 \cap E_2$为边集，以$E_1 \cap E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的交图，记作$G_1 \cap G_2$;
- 称以$E_1 \oplus E_2$为边集($\oplus$为集合之间的对称差运算)，以$E_1 \oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的环和，记作$G_1 \oplus G_2$。

图的运算

在上述定义中，应注意以下几点:

- 若$G_1 = G_2$，则 $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1$
  而$G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = G_1 \oplus G_2 = \phi$（这就是定义空图的原因）
- 当G_1与G_2边不重时，
  $G_1 \cap G_2 = \phi$
  $G_1 - G_2 = G_1$，$G_2 - G_1 = G_2$
  $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$
- 图之间环和的定义也可以用并、交、差来表达，即
  $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$