图论

王智慧
复旦大学计算机学院

平面图

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图

平面图的定义

定义1.

若图G能以除顶点外无边相交的方式画在曲面上，则称G可嵌入曲面. 若G可嵌入平面，则称G是可平面图或平面图.

画出的无边相交的图称为G的平面嵌入；无平面嵌入的图称为非平面图.

基本定理

定理1. 若图G是平面图, 则G的任何子图都是平面图。

定理2. 若G是非平面图, 则G的任何母图也都是非平面图。

定理3. 设G是平面图, 则在G中加平行边或环后所得图还是平面图。

本定理说明平行边和环不影响图的平面性, 因而在研究图是否为平面图时, 可不考虑平行边和环。

平面嵌入

定义2.

设G是平面图且已是平面嵌入, 由G的边将G所在的平面划分成若干个区域, 每个区域都称为G的一个面. 其面积无限的面称为无限面或外部面; 面积有限的面称为有限面或内部面. 包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界; 边界的长度称为该面的次数。

常记外部面为R_0, 内部面为R_1, R_2, …, R_k, 面R的次数记为deg(R).

平面嵌入

定理4. 平面嵌入图G中所有面的次数之和等于边数m的两倍，即

$$\Sigma_{i=1..r}\deg(R_i) = 2m,$$ 其中r为G的面数.

证明:

对于任意的$e \in E(G)$，分以下情况考虑:

若e为面R_i和R_j($i \neq j$)的公共边界上的边时，在计算R_i和R_j的次数时，e各被计算1次;

当e只在某一个面的边界上出现时，则在计算该面的次数时，e被计算2次;

所以，每条边在计算总次数时，都被计算2次。

因此，$\Sigma_{i=1..r}\deg(R_i) = 2m$。

极大平面图

定义3. 设G为简单平面图, 若在G的任意不相邻的顶点u, v之间加边(u, v), 所得图为非平面图, 则称G为极大平面图。

定理5. 极大平面图是连通的。

定理6. 设G是n(n $\geq$ 3)阶极大平面图, 则G中不可能存在割点和桥。

极大平面图

定理7. 设G为$n(n \geq 3)$阶简单连通的平面图, G为极大平面图, 当且仅当G的每个面的次数均为3。

证明: 先证明该定理的必要性。其充分性在后续部分再证明.

因为G为简单平面图, 所以, G中无环和平行边。由定理5和定理6可知, G中无割点和桥。于是G中各面的次数大于或等于3, 下面只需证明: G中各面的次数不可能大于3。

假设面R_i的次数$deg(R_i) = s > 3$。

在G中, 若v_1与v_3不相邻, 在R_i内加边(v_1, v_3)不破坏平面性, 这与G是极大平面图矛盾, 因此, v_1与v_3必相邻。由于R_i的存在,边(v_1, v_3)必在R_i外. 类似地, v_2与v_4也必相邻, 且边(v_2, v_4)必在R_i外. 这样, 必产生(v_1, v_3)与(v_2, v_4)相交于R_i的外部, 这与“G是平面图”相矛盾, 故必有$s = 3$, 即 G中不存在次数大于3的面。

所以, G的每个面都由3条边所围, 也就是说, 各面的次数均为3。

极小非平面图

定义**4.** 若在非平面图**G**中任意删除一条边**,** 所得图为平面图**,** 则称**G**为极小非平面图。

欧拉公式

定理8(欧拉公式) 对于任意连通平面图G, 有n-m+r = 2. 其中 n, m 和r分别为G的顶点数, 边数和面数。

证明: 对边数m进行归纳。

(1) m = 0时, 由于G为连通图, 所以 G只能是平凡图, 结论显然成立。

(2) 设m = k(k ≥ 1)时, 命题成立. 当m = k+1时, 分以下情况:

若G是树, 则G是非平凡的, 因此, G中至少有两个叶结点。设v为叶结点, 令G’ = G-v, 则G’仍然是连通图, 且G’的边数m’ = m-1 = k。由归纳假设可知 n’ – m’ + r’ = 2, 其中n’, m’,和r’分别为G’的顶点数, 边数和面数. 由n’ = n-1, r’ = r可得: n-m+r = (n’+1)-(m’+1)+r’ = n’-m’+r’ = 2

若G不是树, 则G中含圈, 设边e在G中某个圈上。令G’ = G-e, 则G’仍连通, 且m’ = m-1 = k。由归纳假设有 n’ - m’ + r’ = 2。而n’ = n, r’ = r-1,于是 n-m+r = n’-(m’+1)+(r’+1) = n’-m’+r’ = 2。

欧拉公式的推广

定理9(欧拉公式的推广) 对于具有$k(k \geq 2)$个连通分支的平面图G，有：$n-m+r = k+1$(其中：n, m和r分别为G的顶点数，边数和面数)

证明：设G有k个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_k$，G_i的顶点数，边数和面数分别为n_i, m_i和$r_i(i = 1..k)$.

由欧拉公式可知：$n_i-m_i+r_i = 2 \quad (i = 1..k) \qquad (1)$

又$m = \Sigma_{i=1..k}m_i$, $n = \Sigma_{i=1..k}n_i$，由于每个G_i有一个外部面，且G只有一个外部面，所以，G的面数$r = \Sigma_{i=1..k}r_i - k + 1$。

于是，对上式(1)两边同时求和，得：

$2k=\Sigma_{i=1..k}(n_i-m_i+r_i)=\Sigma_{i=1..k}n_i - \Sigma_{i=1..k}m_i + \Sigma_{i=1..k}r_i = n-m+r+k-1$

所以，经整理得 $n-m+r = k+1$。

欧拉公式: 平面图的性质

定理10. 设G是连通的平面图, 且每个面的次数至少为L ($L \geq 3$), 则G的边数m与顶点数n有如下关系: $m \leq (n-2)L/(L-2)$。

证明:

设 连通平面图G有r个面。由定理4可知:

$$2m = \Sigma_{i=1..r}\deg(R_i) \geq L*r \qquad (1)$$

由欧拉公式可知: $r = 2+m-n$ (2)

将(2)代入(1)中得 $2m \geq L(2+m-n)$

经过整理得 $m \leq (n-2)L/(L-2)$。

欧拉公式：平面图的性质

推论 K_5和$K_{3,3}$都不是平面图。

证明:

假设K_5是平面图。由于K_5中无环和平行边，所以，每个面的次数至少为$L(L \geq 3)$。由定理10可知，其边数10应满足

$$10 \leq (5-2)*3/(3-2) = 9。$$

这显然是矛盾的，所以，K_5不是平面图。

假设$K_{3,3}$是平面图. 由于$K_{3,3}$中最短圈的长度$L \geq 4$，于是，其边数9应满足

$$9 \leq (6-2)*4/(4-2) = 8$$

这又是矛盾的，所以，$K_{3,3}$也不是平面图。

欧拉公式: 平面图的性质

定理11. 设G是有$k(k \ge 2)$个连通分支的平面图, 各面的次数至少为 $L(L \ge 3)$, 则边数m与顶点数n应有如下关系: $m \le (n-k-1)L/(L-2)$.

利用欧拉公式的推广容易证明该定理。

定理12. 设G是$n(n \ge 3)$阶m条边的简单平面图, 则 $m \le 3n-6$。

证明: 设G有$k(k \ge 1)$个连通分支。分以下情况考虑:

若G为树或森林, 则 $m = n - k \le 3n-6$ $(n \ge 3)$;

若G不是树也不是森林, 则G中必含有圈。因为G为简单图, 所以, 各圈的长度均大于等于3。因各面次数至少为$L(L \ge 3)$, 且$L/(L-2) = 1+2/(L-2)$在$L=3$时达到最大值3, 由定理11可知

$m \le (n-k-1)L/(L-2) \le 3(n-k-1) \le 3(n-2) = 3n-6$。

欧拉公式: 平面图的性质

定理13. 设G是$n(n \geq 3)$阶m条边的极大平面图, 则$m = 3n-6$。

证明:

由于极大平面图是连通图, 由欧拉公式得:

$$r = 2+m-n \qquad (1)$$

由G是极大平面图和定理7的必要性可知, G的每个面的次数均为3。所以,

$$2m = \Sigma_{i=1..r}\deg(R_i) = 3r \qquad (2)$$

将上式(1)代入式(2), 整理后可得: $m = 3n-6$。

欧拉公式: 平面图的性质

定理14. 设G是简单平面图, 则G的最小度$\delta \le 5$。

证明:

设G是n阶简单平面图. 当$n \le 6$时, 结论显然成立. 下面考虑当$n \ge 7$时的情况.

假设$\delta \ge 6$. 由握手定理可知, $2m = \Sigma_{i=1..n} d(v_i) \ge 6n$。

因此, $m \ge 3n$。这与定理12的结论"$m \le 3n-6$"相矛盾.

所以, G的最小度$\delta \le 5$。

回顾: 证明定理7中的充分性

定理7. 设G为n($n \geq 3$)阶简单连通的平面图, G为极大平面图, 当且仅当G的每个面的次数均为3。

证明:

(下面证明充分性)

由定理4可知: $2m = \Sigma_{i=1..r}\deg(R_i) = 3r$ (1)

由G是连通的和欧拉公式可得: $r = 2+m-n$ (2)

将上式(2)代入式(1), 整理可得: $m = 3n-6$ (3)

假设G不是极大平面图, 则G中一定存在不相邻的顶点u和v, 使得$G' = G \cup (u, v)$还是简单平面图. 而G'的边$m' = m+1$, $n' = n$, 由式(3)可知, $m' > 3n'-6$. 这与定理12的结论"$m \leq 3n-6$"相矛盾。

所以, G一定是极大平面图。

平面图的判断: 两个重要定义

定义5. 设e=(u, v)为图G的一条边, 在G中删除e, 增加新的顶点w, 使u和v均与w相邻, 称在G中插入2度顶点w。

设w为G中一个2度顶点, w与u和v相邻, 删除w, 增加新边(u, v), 称为在G中消去2度顶点w。

定义6. 若两个图G_1与G_2同构, 或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的, 则称G_1与G_2是同胚的。

库拉图斯基定理

定理15(库拉图斯基定理1)

图G是平面图，当且仅当G中既不含与K_5同胚子图，也不含与$K_{3,3}$同胚子图。

定理16(库拉图斯基定理2)

图G是平面图，当且仅当G中既没有可收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图。

对偶图的定义及性质

定义7.

设G是平面图的某个平面嵌入, 构造G的对偶图G*如下:

在G的面R_k中放置G*的顶点v_k*. 设∀e∈E(G),

若e在G的面R_i与R_j的公共边界上, 做G*的边e*=(v_i*, v_j*)与e相交, 且e*不与其它边相交;

若e为G中的桥且在面R_i的边界上, 则e*=(v_i*, v_i*)是以v_i*为端点的环。

由定义不难看出, G的对偶图G*有以下性质:

- G*是平面图, 而且是平面嵌入
- G*是连通图
- 若边e为G中的环, 则G*与e对应的边e*为桥; 若e为桥, 则G*中与e对应的边e*为环
- 在多数情况下, G*为多重图(含平行边的图)
- 同构的平面图(平面嵌入)的对偶图不一定是同构的

对偶图的相关定理

定理17. 设G*是连通平面图G的对偶图, n*, m*, r*和n, m, r分别为G*和G的顶点数, 边数和面数, 则:

(1) $n^* = r$, (2) $m^* = m$ (3) $r^* = n$

(4) 设G*的顶点v_i^*位于G的面R_i中, 则$d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$

证明: 由G*的构造可知, (1)和(2)是显然成立的。

(3) 由于G与G*都连通, 因此, 根据欧拉公式有

$n-m+r = 2$, $n^*-m^*+r^* = 2$

由(1)和(2)可知, $r^* = 2+m^*-n^* = 2+m-r = n$。

(4) 设G的面R_i的边界为C_i, C_i中有$k_1(k_1 \geq 0)$条桥, k_2个非桥边。于是, C_i的长度为k_2+2k_1, 即$\deg(R_i) = k_2+2k_1$。

由"对偶图的定义"可知, k_1条桥对应v_i^*处有k_1个环, k_2条非桥边对应从v_i^*处引出k_2条边。所以, $d_{G^*}(v_i^*) = k_2+2k_1 = \deg(R_i)$。

对偶图的相关定理

定理18. 设G*是具有$k(k \geq 2)$个连通分支的平面图G的对偶图，则

(1) $n^* = r$

(2) $m^* = m$

(3) $r^* = n - k+1$

(4) 设v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$.

其中 n^*, m^*, r^*, n, m, r同定理17中的含义一样.

自对偶图

定义8. 设G*是平面图G的对偶图, 若G* ≅ G, 则称G为自对偶图。

n阶轮图

在n-1(n ≥ 4)边形C_{n-1}内放置一个顶点，使该顶点与C_{n-1}上的所有顶点均相邻. 所得n阶简单图称为**n阶轮图**。常将n阶轮图记为W_n.

n为奇数的轮图称为**奇阶轮图**，n为偶数的轮图称为**偶阶轮图**。