图论

王智慧
复旦大学计算机学院

支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 支配集、点覆盖集与点独立集
- 边覆盖集与匹配
- 二部图中的匹配
- 点着色
- 地图着色与平面图的点着色
- 边着色

支配集的定义

定义1.

设图G = <V, E>, $V^* \subseteq V$, 若对于$\forall v_i \in V - V^*$, $\exists v_j \in V^*$, 使得 $(v_i, v_j) \in E$, 则称v_j支配v_i, 并称V^*为G的一个支配集;

若支配集V^*的任何真子集都不是支配集, 则称V^*是极小支配集;

顶点数最少的支配集称为最小支配集;最小支配集中的顶点数称为支配数, 记作$\gamma_0(G)$或简记为γ_0.

点独立集

定义2.

设图G = <V, E>, $V^* \subseteq V$, 若V*中任何两个顶点均不相邻, 则称V*为G的点独立集, 或称独立集;

若在V*中加入任何顶点都不再是独立集, 则称V*为极大点独立集;

顶点数最多的点独立集称为最大点独立集; 最大点独立集的顶点数称为点独立数, 记作$\beta_0(G)$, 简记为β_0.

点独立集与支配集的关系

定理1. 设$G = <V, E>$中无孤立点, 则G的极大点独立集都是G的极小支配集。

证明:

设 V^*是G中的任意一个极大独立集. $\forall v \in V - V^*$, 一定 $\exists v' \in V^*$, 使得 $(v, v') \in E$. 否则$\exists u \in V-V^*$不与V^*中任何顶点相邻, 则$V^* \cup \{ u \}$就是一个更大的独立集, 这与V^*是极大独立集相矛盾. 所以, V^*是G的支配集。

由"V^*是点独立集"可知, $\forall V_1^* \subset V^*$, $V^* - V_1^*$中的顶点都不受V_1^*中的顶点支配, 即V_1^*不是支配集. 所以, V^*是极小支配集。

点覆盖集

定义3.

设$G = <V, E>$, $V^* \subseteq V$, 若对于$\forall e \in E$, $\exists v \in V^*$, 使得 v与e相关联, 则称v覆盖e, 并称V*为G的点覆盖集或简称点覆盖;

若点覆盖V*的任何真子集都不是点覆盖, 则称V*是极小点覆盖;

顶点个数最少的点覆盖称为最小的点覆盖; 最小点覆盖的顶点数称为点覆盖数, 记作$\alpha_0(G)$, 简记为α_0.

点覆盖集与点独立集的关系

定理2. 设G = <V, E>中无孤立点, $V^*(V^* \subset V)$为G的点覆盖, 当且仅当$V-V^*$为G的点独立集。

证明:

(必要性)

假设存在$v_i, v_j \in V - V^*$, 且$(v_i, v_j) \in E$. 由于顶点v_i和v_j都不在V^*中, 这显然与"V^*是点覆盖"相矛盾. 所以, $V - V^*$为点独立集。

(充分性)

由于$V - V^*$是点独立集, 因此, 任意一条边的两个端点至少有一个在V^*中. 根据定义可知, V^*是G的点覆盖。

推论 设G是n阶无孤立点的图, 则V^*是G的极小(最小)点覆盖, 当且仅当$V-V^*$是G的极大(最大)点独立集, 从而有$\alpha_0 + \beta_0 = n$。

边覆盖集

定义4.

设图$G = \langle V, E \rangle$, $E^* \subseteq E$, 若$\forall v \in V$, $\exists e \in E^*$, 使得 v与e相关联, 则称e覆盖v, 并称E^*为边覆盖集, 或简称边覆盖;

若边覆盖E^*的任何真子集都不是边覆盖, 则称E^*是极小边覆盖;

边数最少的边覆盖集称为最小的边覆盖; 最小的边覆盖所含的边数称为边覆盖数, 记作$\alpha_1(G)$或简记为α_1.

边独立集(匹配)

定义5.

设G = <V, E>, 若E*(E*$\subseteq$E)中任何两条边均不相邻, 则称E*为G中边独立集, 也称E*为G中的匹配;

若在E*中加入任意一条边所得集合都不是匹配, 则称E*为极大匹配;

边数最多的匹配称为最大匹配;最大匹配的边数称为边独立数或匹配数, 记作 $\beta_1(G)$, 简记为β_1.

与匹配相关的概念

定义6. 假设M为图G中一个匹配,

- 若$(v_i, v_j)\in M$, 则称v_i与v_j被M所匹配,即(v_i, v_j)为匹配边;否则为非匹配边;
- 对$\forall v\in V(G)$, 若存在边$e\in M$, 使e与v关联, 则称v为M-饱和点; 否则, 称v为M-非饱和点;
- 若G中每个顶点都是M-饱和点, 则称M为G中的完美匹配;
- 称在M和E(G)-M中交替取边的路径为M的交错路径, 起点和终点都是M-非饱和点的交错路径称为可增广的交错路径;
- 称在M和E(G)-M中交替取边的圈为交错圈.

最大匹配与最小边覆盖

定理3. 设n阶图G中无孤立点。

(1) 设M为G的一个最大匹配, 对于G中每个M-非饱和点均取一条与其关联的边, 组成边集N, 则$W = M \cup N$为G中最小边覆盖;

(2) 设W_1为G中的一个最小边覆盖, 若W_1中存在相邻的边就移去其中的一条, 设移去的边集为N_1, 则$M_1 = W_1 - N_1$为G中一个最大匹配;

(3) G中边覆盖数α_1与匹配数β_1, 满足 $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

最大匹配与最小边覆盖

定理3. (定理的描述内容见上页)

证明: 由“M为最大匹配”可知, $|M| = \beta_1$. 于是G中含有$n-2\beta_1$个M-非饱和点.由“边覆盖的定义”可知, $W = M \cup N$为G中的边覆盖, 且

$$|W| = |M|+|N| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1$$

由“W_1是最小边覆盖”可知, W_1中每条边的两个端点不可能都与W_1中的其它边相关联, 因此, 在由W_1构造M_1时(注意到构造出来的M_1显然是匹配), 每移去相邻两条边中的一条时, 产生且只产生一个M-非饱和点.所以, $|N_1| = \underline{|W_1| - |M_1|} = M_1$的非饱和点数 $= \underline{n - 2|M_1|}$. 整理后, 得 $|W_1| = \alpha_1 = n - |M_1|$

又因为M_1是匹配, W是边覆盖, 所以, $|M_1| \le \beta_1$, $|W| \ge \alpha_1$。

通过比较可得 $\alpha_1 = n-|M_1| \ge n - \beta_1 = |W| \ge \alpha_1$。显然上式中各等号成立, 所以, $|M_1| = \beta_1$, $|W| = \alpha_1$, 且$\alpha_1 + \beta_1 = n$。由此可知, M_1是最大匹配, W是最小边覆盖, 且结论(3)成立。

匹配与边覆盖

推论 设G是n阶无孤立点的图, M为G中的匹配, W是G中的边覆盖, 则$|M| \le |W|$; 当等号成立时, M为G中完美匹配, W为G中最小边覆盖.

证明:

由定理3中的(1)可知 $\beta_1 \le \alpha_1$.

又由定义可知, $|M| \le \beta_1 \le \alpha_1 \le |W|$.

所以, $|M| \le |W|$成立. 当等号成立时, 说明 M是最大匹配, W是最小边覆盖。

由定理3中(3)可知, $\alpha_1 + \beta_1 = 2\beta_1 = n$, 显然, G中无M-非饱和点. 所以, M必为G中完美匹配.

最大匹配与可增广的交错路径

定理4. M为G中的最大匹配当且仅当G中不含M的可增广的交错路径.

证明:

(必要性)

设 M为G中最大匹配. 若G中存在M的可增广的交错路径Γ, 则Γ中在M中的边比不在M中的少1.

设M’ = (M∪Γ(E)) - (M∩Γ(E)) = M⊕Γ(E), 则M’中边彼此不邻, 且M’比M多一条边, 即 M’是比M多一条边的匹配, 这就与“M是最大匹配”相矛盾。

所以, G中不含M的可增广的交错路径.

最大匹配与可增广的交错路径

定理4. M为G中的最大匹配当且仅当G中不含M的可增广的交错路径.

证明: (续)

(充分性)

设 M是G中不含可增广的交错路径的匹配, M_1是G中的最大匹配. 下面证明: $|M| = |M_1|$. 设 $H = G[M_1 \oplus M]$.

当$H = \phi$时, 有 $M = M_1$, 所以 M为G中最大匹配;

当$H \neq \phi$时,由于M和M_1都是匹配, 所以 H的各连通分支要么是由M和M_1中的边组成的交错圈, 在交错圈上M和M_1中的边数相等; 要么为由M和M_1的边组成的交错路径. 由已知条件可知, 不含M的可增广的交错路径; 同时由于M_1是最大匹配,由必要性可知, 不含M_1的可增广的交错路径. 所以, 在由M和M_1组成的交错路径上, M和M_1的边也相等. 总之, M与M_1边的个数相同.

所以, M为G中的最大匹配.

完备匹配

定义7. 设$G = <V_1, V_2, E>$为二部图, $|V_1| \leq |V_2|$, M为G中一个最大匹配, 且$|M| = |V_1|$, 则称M为V_1到V_2的完备匹配.

注意: 在上述定义中, 若$|V_1| = |V_2|$, 则完备匹配为完美匹配.

Hall定理

定理5(Hall定理) 二部图$G = <V_1, V_2, E>$, $|V_1| \le |V_2|$, G中存在从V_1到V_2的完备匹配 当且仅当 V_1中任意k(k=1…$|V_1|$)个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻。

证明: (该定理中的条件也称为”相异性条件”). 定理的必要性是显然成立的.下面证明其充分性, 即只要证明满足相异性条件, G中的最大匹配一定是完备匹配.

设M为G中一个最大匹配. 若M不是完备匹配, 则在V_1中一定存在一个M-非饱和点u, 且存在边$e \in E-M$与u关联, 否则u将是孤立点, 这与相异性条件相矛盾. 并且, V_2中与u相邻的顶点都是M-饱和点, 否则若存在$v \in V_2$为M-非饱和点且v与u相邻, 则$M' = M \cup (u, v)$也是匹配, 这与“M为最大匹配”相矛盾. (转下页…)

Hall定理

定理5(Hall定理) 二部图$G = <V_1, V_2, E>$, $|V_1| \le |V_2|$, G中存在从V_1到V_2的完备匹配 当且仅当 V_1中任意$k(k=1\ldots|V_1|)$个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻。

证明: (续)

考虑从u出发尽可能长的所有交错路径, 由于M是最大匹配, 由定理4可知, 这些交错路径都不是可增广的, 即每条路径异于u的端点一定是M-饱和点. 所以, 这些端点全在V_1中.

令$S = \{ v \mid v \in V_1$且v在从u出发的交错路径上$\}$, $T = \{ v \mid v \in V_2$且v在从u出发的交错路径上$\}$. 由于各条交错路径的两个端点全在S中, 所以$|S| = |T|+1$. 这说明V_1中$|T|+1$个顶点只与V_2中$|T|$个顶点相邻,矛盾于相异性条件.

因而V_1中不可能存在M-非饱和点, 故M是完备匹配.

t条件

定理6. 设二部图$G = \langle V_1, V_2, E\rangle$, V_1中每个顶点至少关联$t(t \geq 1)$条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边, 则G中存在V_1到V_2的完备匹配。

证明:

由已知条件可知, V_1中任意$k(1 \leq k \leq |V_1|)$个顶点至少关联kt条边. 而V_2中每个顶点至多关联t条边, 所以这kt条边至少关联V_2中k个顶点. 这说明G满足相异性条件.

由Hall定理可知, G中一定存在完备匹配。

点着色的定义

图着色问题的研究起源于四色猜想, 着色问题包含点着色, 边着色, 平面图的面着色等. 本节讨论无环无向图的点着色问题。

定义8.

对无环图**G**的每个顶点涂一种颜色, 使相邻的顶点涂不同的颜色, 称为对图**G**的一种**着色**;

若能用**k**种颜色给**G**的顶点着色, 则称对**G**进行了**k着色**, 也称**G**是**k-可着色的**;

若**G**是**k**-可着色的, 不是**(k-1)**-可着色的, 就称**G**是**k色图**, 并称这样的**k**为**G**的**色数**, 记作$\chi(G) = k$. 当不会引起混淆时, $\chi(G)$也可简记作χ。

点着色的相关性质

从定义不难得到下面结论:

1. $\chi(G) = 1$, 当且仅当G是零图。
2. $\chi(K_n) = n$。
3. 偶圈的色数为2,奇圈和奇阶轮图的色数为3, 偶阶轮图的色数为4。
4. 设G中至少含一条边, 则$\chi(G)=2$ 当且仅当G为二部图。

点着色的相关定理

定理7. 对于任意不含环的图G, 有 $\chi(G) \le \Delta(G)+1$。

证明: 对G的阶数n进行归纳。

当$n = 1$时, 结论显然为真. 设当$n = k(k \ge 1)$时, 结论成立. 当$n = k+1$时, 证明如下:

设v为G中一个顶点, 令$G' = G-v$, 则G'的阶数为k。由归纳假设可知 $\chi(G') \le \Delta(G')+1 \le \Delta(G)+1$。

当将G'还原成G时, 由于v至多与G'中$\Delta(G)$个顶点相邻, 而在G'的点着色中, $\Delta(G)$个顶点至多用了$\Delta(G)$种颜色。所以, 在$\Delta(G)+1$种颜色中至少存在一种颜色给v涂色, 使v与相邻顶点涂不同颜色。

定理8. 设无环图G不是完全图$K_n(n \ge 3)$, 也不是奇圈, 则$\chi(G) \le \Delta(G)$.

本定理称为布鲁克斯(Brooks)定理.

地图及其着色

连通无桥平面图的平面嵌入和所有的面称为平面地图或地图，地图的面称为“国家”。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是相邻的。

定义9.

对地图G的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对G的一种面着色；

若能用k种颜色给G的面着色，则称对G的面进行了k着色，或称G是k-面可着色的；

若G是k-面可着色的，不是(k-1)-面可着色的，称G的面色数为k，记作$\chi^*(G) = k$。

地图的着色与平面图的点着色

定理9. 地图G是k-面可着色的,当且仅当它的对偶图G*是k-可着色的.

证明: (必要性)

给定G一种k-面可着色. 由于G连通, 可知: $n^* = r$, 即G的每个面中含G*的一个顶点. 设v_k^*位于G的面R_k内, 将G*的顶点v_k^*涂R_k的颜色.

易知, 对于G*中任意两个相邻的顶点v_s^*与v_t^*, 则由于R_s与R_t的颜色不同, 所以 v_s^*与v_t^*的颜色也不同, 即G*是k-可着色的。

类似可证该定理的充分性.

由上面定理可知, 地图的着色(面着色)问题, 等价于平面图的点着色问题.

定理10(四色定理). 任何平面图都是4-可着色的.

边着色的定义

定义10.

对图G的每条边涂上一种颜色, 使相邻的边涂不同的颜色, 称为对图G边的一种着色; 若能用k种颜色给G的边着色, 则称G是k-边可着色的.

若G是k-边可着色的, 不是(k-1)-边可着色的, 就称k是G的边色数, 记作$\chi'(G) = k$.

边着色的相关定理

定理11. 设G是简单图，则$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$。

(本定理也称为维津定理.)

定理12. 设$G = <V_1, V_2, E>$为二部图，则$\chi'(G) = \Delta(G)$。

例. 设G为长度大于等于2的偶圈，则$\chi'(G) = \Delta(G) = 2$;

设G为长度大于等于3的奇圈，则$\chi'(G) = \Delta(G)+1 = 3$。

边着色: 例子

例. 当n(n $\neq$ 1)为奇数时, $\chi'(K_n) = n$; 当n为偶数时, $\chi'(K_n) = n-1$.

证明:

当n为奇数且n $\neq$ 1时,由维津定理可知, $\chi'(K_n) \leq \Delta+1 = n$.下面证明 $\chi'(K_n) \geq n$.

用如下方法得到K_n: 画正n边形C_n, C_n上不相邻的顶点之间连线段, 得到K_n。在K_n中共有n组平行边, 每组(n-1)/2条边, 而(n-1)/2条平行边已经关联了n-1个顶点, 于是 在K_n的边着色中至多有(n-1)/2条同色边, 因此 $\chi'(K_n)$ (n-1) /2 $\geq$ (n-1) n/2, 所以, $\chi'(K_n) \geq n$.

边着色: 例子

例. 当$n(n \neq 1)$为奇数时, $\chi'(K_n) = n$; 当n为偶数时, $\chi'(K_n) = n-1$.

证明: (续)

当n为偶数时, 由维津定理可知 $n-1 = \Delta \leq \chi'(K_n)$. 下面证明 $\chi'(K_n) \leq n-1$.

用如下方法得到K_n: 画K_{n-1}($n-1$为奇数), 在K_{n-1}的内部放置一个顶点, 使其与K_{n-1}上的所有顶点相邻, 就得到了K_n($n = 6$时, 如右图所示).

用$\chi'(K_{n-1}) = n-1$种颜色先给K_{n-1}的边着色, 然后将K_n中相互垂直的边涂上相同颜色, 就完成了K_n边的$n-1$着色.

所以, $\chi'(K_n) \leq \chi'(K_{n-1}) = n-1$.