**7.6 习题**

**2．试证明下述几何变换的矩阵运算具有互换性：**

**（1）两个连续的旋转变换；（2）两个连续的平移变换；**

**（3）两个连续的变比例变换；（4）当比例系数相等时的旋转和比例变换；**

（1）证明：设第一次的旋转变换为：

 cosθ1 sinθ1 0

 T1= - sinθ1 cosθ1 0

 0 0 1

第二次的旋转变换为：

 Cosθ2 sinθ2 0

 T2= - sinθ2 cosθ2 0

 0 0 1

则因为

 T1\*T2 = cosθ1 sinθ1 0 cosθ2 sinθ2 0

 - sinθ1 cosθ1 0 - sinθ2 cosθ2 0

 0 0 1 0 0 1

 = cosθ1 cosθ2+sinθ1 sinθ2 cosθ1 sinθ2+ sinθ1 cosθ2 0

 - sinθ1 cosθ2- cosθ1 sinθ2 -sinθ1 sinθ1+ cosθ1 cosθ2 0

 0 0 1

 Cos（θ1+θ2） sin（θ1+θ2） 0

 = - sin（θ1+θ2） cos（θ1+θ2） 0

 0 0 1

 cosθ2 sinθ2 0 cosθ1 sinθ1 0

 T2\*T1 = - sinθ2 cosθ2 0 - sinθ1 cosθ1 0

 0 0 1 0 0 1

 cosθ1 cosθ2+ sinθ1 sinθ2 cosθ1 sinθ2+ sinθ1 cosθ2 0

 = - sinθ2cosθ1- cosθ2 sinθ1 -sinθ1 sinθ1+ cosθ1 cosθ2 0

 0 0 1

 Cos（θ1+θ2） sin（θ1+θ2） 0

 = - sin（θ1+θ2） cos（θ1+θ2） 0

 0 0 1

即T1\*T2= T2\*T1, **两个连续的旋转变换具有互换性**

（2）证明：设第一次的平移变换为：

 1 0 0

 T1= 0 1 0

 Tx1 Ty1 1

第二次的平移变换为：

 1 0 0

 T2= 0 1 0

 Tx2 Ty2 1

则因为

 T1\*T2 = 1 0 0 1 0 0

 0 1 0 0 1 0

 Tx1 Ty1 1 Tx2 Ty2 1

 1 0 0

 = 0 1 0

 Tx1+Tx2 Ty1+Ty2 1

而

 T2\*T1 = 1 0 0 1 0 0

 0 1 0 0 1 0

 Tx2 Ty2 1 Tx1 Ty1 1

 1 0 0

 = 0 1 0

 Tx1+Tx2 Ty1+Ty2 1

即T1\*T2= T2\*T1, **两个连续的平移变换具有互换性**

（3）证明：设第一次的变比例变换为：

 Sx1 0 0

 T1= 0 Sy1 0

 0 0 1

第二次的变比例变换为：

 Sx2 0 0

 T2 = 0 Sy2 0

 0 0 1

则因为

 T1\*T2 = Sx1 0 0 Sx2 0 0

 0 Sy1 0 0 Sy2 0

 0 0 1 0 0 1

 Sx1\*Sx2 0 0

 = 0 Sy1\*Sy2 0

 0 0 1

而

 T2\*T1 = Sx2 0 0 Sx1 0 0

 0 Sy2 0 0 Sy1 0

 0 0 1 0 0 1

 Sx1\*Sx2 0 0

 = 0 Sy1\*Sy2 0

 0 0 1

即T1\*T2= T2\*T1, **两个连续的变比例变换具有互换性**

（4）证明：设第一次为比例系数相等时的比例变换：

 S 0 0

 T1= 0 S 0

 0 0 1

第二次的为旋转变换：

 cosθ sinθ 0

 T2= - sinθ cosθ 0

 0 0 1

则因为

 T1\*T2 = S 0 0 cosθ sinθ 0

 0 S 0 - sinθ cosθ 0

 0 0 1 0 0 1

 S cosθ S sinθ 0

 = - S sinθ S cosθ2 0

 0 0 1

而

 T2\*T1 = cosθ sinθ 0 S 0 0

 - sinθ cosθ 0 0 S 0

 0 0 1 0 0 1

 S cosθ S sinθ 0

 = -S sinθ S cosθ 0

 0 0 1

即T1\*T2= T2\*T1, **“当比例系数相等时的旋转和比例“变换具有互换性**

**3、证明二维点相对x轴作对称，紧跟着相对y=-x直线作对称变换完全等价于该点相对坐标原点作旋转变换。**

证明：

(1) 点相对x轴作对称的变换矩阵

 1 0 0

 T1= 0 -1 0

 0 0 1

 (2) 相对于y=-x直线作对称变换矩阵

 0 -1 0

T2= -1 0 0

 0 0 1

 1 0 0 0 -1 0 0 -1 0

因为 T1\*T2= 0 -1 0 \* -1 0 0 = 1 0 0

 0 0 1 0 0 1 0 0 1

 cos(-90º) sin(-90 º) 0

 = - sin(-90 º) cos(-90º) 0

 0 0 1

 即该点相对坐标原点作顺时针方向转90 º的旋转变换

1. **证明**

 **1-t2 2t**

 **1+ t 2 1+t2**

**T= 完全表示一个旋转变换。**

 **-2t 1-t2**

**1+t2 1+t2**

证明：令t=tg(θ/2)

则：（1-t2）/(1+ t 2)= cosθ

（2t）/(1+ t 2)= sinθ

即

 cosθ sinθ

T=

- sinθ cosθ

 将T扩充为一个三行齐次坐标的变换矩阵为：

 cosθ sinθ 0

T= - sinθ cosθ 0

0 0 1

 该矩阵表示为一个旋转变换

**5、例：三角形ABC各顶点坐标为A（3，0）B（4，2）C（6，0），其绕原点逆时针旋转90°，再向X方向平移2，Y方向平移-1。**

解：因为：θ=90°

变换矩阵为

 **COS90° SIN90° 0 0 1 0**

**TR= - SIN90° COS90° 0 = -1 0 0**

 **2 -1 1 2 -1 -1**

则

**A 3 0 1 0 1 0 2 2 1 A‘**

**B 4 2 1 -1 0 0 = 0 3 1 B‘**

**C 6 0 1 2 -1 1 2 5 1 C‘**

如果先进行平移变换，再进行旋转变换，

 1 0 0 **COS90° SIN90° 0 0 1 0**

Tr= 0 1 0 **- SIN90° COS90° 0 = -1 0 0**

 **2 -1 1 0 0 1 1 2 1**

**则**

**A 3 0 1 0 1 0 1 5 1 A‘**

**B 4 2 1 -1 0 0 = -1 6 1 B‘**

**C 6 0 1 1 2 1 1 8 1 C‘**

**结论：变换顺序不同，结果也不同**