第六章 曲线和曲面

**3、参照Hermite三次曲线的几何形式，试用B[P0 P1 P0u P1u P0uu P1uu]T , 推导相应五次曲线的调和函数和系数矩阵M。**

解：设Hermite五次曲线的几何形式为：

 P(t)=a5t5 + a4t4 + a3t3 + a2t2 + a1t + a0 其中 t∈[0,1]

按题意，已知曲线两端点的坐标值P0 P1

曲线两端点的一阶导数值P0u P1u

曲线两端点的二阶导数值P0uu P1uu

则求出系数a5,a4,a3,a2,a1,a0

则P(t)就可确定；

 由于P(t)= a5t5 + a4t4 + a3t3 + a2t2 + a1t + a0 其中 t∈[0,1]

 P’(t)=5a5t4 + 4a4t3 + 3a3t2 + 2a2t + a1

 P”(t)=20a5t3+12a4t2+6a3t+2a2

P0=P(0)=a0

P1=P(1)=a5+a4+a3+a2+a1+a0

 P0’=P’(0)=a1

 P1’=P’(1)=5a5+4a4+3a3+2a2+a1

 P0”=P”(0)=2a2

 P1”=P”(1)=20a5+12a4+6a3+2a2

 所以 a0 = P(0)

a1 =P’(0)

 a2 =P”(0)/2

 a3 = 10P(1)- 10P(0) - 4P’(1) - 6P’(0) + P”(1)/2 - 3P”(0)/2

 a4 =-15P(1)+ 15P(0) + 7P’(1) + 8P’(0) - P”(1) - 3P”(0)/2

 a5 = 6P(1)- 6P(0) - 3P’(1) - 3P’(0) - P”(0)/2 + P”(1)/2

 =>

P(t)=[ -6P(0) + 6P(1) - 3P’(0) - 3P’(1) - P”(0)/2 + P”(1)/2] t5

 +[+15P(0) - 15P(1) + 8P’(0) + 7P’(1) + 3P”(0)/2 ] t4

 +[-10P(0) + 10P(1) - 6P’(0) - 4P’(1) - 3P”(0)/2 + P”(1)/2] t3

 + [ P”(0)/2] t2

 + [P’(0)] t

 +P(0)

 整理得：

 P(t) = (-6t5 + 15t4 - 10t3 + 1) P(0) + (6t5-15t4+10t3) P(1)

 + (-3t5 + 8t4 -6t3 + t) P’(0) + (-3t5 +7t4-4t3) P’(1)

 + (-t5/2+ 3t4/2-3t3/2+t2/2) P”(0) + (t5/2-t4+t3/2) P”(1)

 故调和函数为：

 F(0)= -6t5 + 15t4 - 10t3 + 1

 F(1)= 6t5 - 15t4 + 10t3

 F(2)= -3t5 + 8t4 - 6t3 + t

 F(3)= -3t5 + 7t4- 4t3

 F(4)= -t5/2 + 3t4/2 -3t3/2 + t2/2

 F(5)= t5/2 - t4 + t3/2

系数矩阵为：

 - 6 6 -3 -3 -1/2 1/2

 15 -15 8 7 3/2 -1

 -10 10 -6 -4 -3/2 1/2

 0 0 0 0 1/2 0

 0 0 1 0 0 0

 1 0 0 0 0 0

**9．试求两段三次Hermite曲线达C1和G1连续的条件**

解：两段三次Hermite曲线分别为：

 Q1(t1)=a3 t13 + a2 t12+ a1 t1+ a0 t1∈[0 1]

Q2(t2)=b3 t23 + b2 t22+ b1 t2+ b0 t2∈[0 1]

(1)依据G1连续充要条件为：

Q1(1)和Q2(0)在P点处重合，

且其在P点处的切矢量方向相同，大小不等

 即 Q1(1)= Q2(0)， Q1’(1)≠ Q2’(0) ,Q1”(1)= Q2”(0)

而 Q1(1)= a3 + a2 + a1 + a0

 Q2(0)= b0

Q1’(t1)=3a3 t12 + 2a2 t1+ a1

Q2’(t2)=3b3 t22 + 2b2 t2+ b1

 Q1’(1)=3a3 + 2a2+ a1

Q2’(0)= b1

Q1”(t1)=6a3 t1 + 2a2

Q2”(t2)=6b3 t2 + 2b2

Q1”(1)=6a3 + 2a2

Q2”(0)= 2b2

=> 两段三次Hermite曲线：

 Q1(t1)=a3 t13 + a2 t12+ a1 t1+ a0 t1∈[0 1]

Q2(t2)=b3 t23 + b2 t22+ b1 t2+ b0 t2∈[0 1]

 要达到G1连续，其系数必须满足下列关系式：

a3 + a2 + a1 + a0 = b0

3a3 + 2a2 + a1 ≠ b1

 6a3 + 2a2 =2 b2

(2)依据C1连续充要条件为：

Q1(1)和Q2(0)在P点处重合，

且其在P点处的切矢量方向相同，大小相等

 即 Q1(1)= Q2(0)， Q1’(1)= Q2’(0) ,Q1”(1)= Q2”(0)

而 Q1(1)= a3 + a2 + a1 + a0

 Q2(0)= b0

Q1’(t1)=3a3 t12 + 2a2 t1+ a1

Q2’(t2)=3b3 t22 + 2b2 t2+ b1

 Q1’(1)=3a3 + 2a2+ a1

Q2’(0)= b1

Q1”(t1)=6a3 t1 + 2a2

Q2”(t2)=6b3 t2 + 2b2

Q1”(1)=6a3 + 2a2

Q2”(0)= 2b2

=> 两段三次Hermite曲线：

 Q1(t1)=a3 t13 + a2 t12+ a1 t1+ a0 t1∈[0 1]

Q2(t2)=b3 t23 + b2 t22+ b1 t2+ b0 t2∈[0 1]

 要达到C1连续，其系数必须满足下列关系式：

a3 + a2 + a1 + a0 = b0

3a3 + 2a2 + a1 = b1

 6a3 + 2a2 =2 b2

**10.给定四点P1（0,0,0）,P2(1,1,1),P3(2,-1,-1),P4(3,0,0),用其作为特征多边形来构造一条三次Bezier曲线，并计算参数为0，1/3，2/3，1的值。**

解：三次Bezier曲线的一般式为：

 P(t)=(1-t)3P1 +3t(1-t)2P2+ 3t2(1-t)P3+t3P4 t∈[0 1]

 **其矩阵表达式为**

-1 3 -3 1 P1

P(t)=[t3 t2 t 1] 3 -6 3 0 P2

 -3 3 0 0 P3

 1 0 0 0 P4

-1 3 -3 1 0 0 0

 **=** [t3 t2 t 1] 3 -6 3 0 1 1 1

 -3 3 0 0 2 -1 -1

 1 0 0 0 3 0 0

 **0**  6 6

 **=>** P(t)=[t3 t2 t 1] 0 -9 -9

 3 3 3

 0 0 0

 **然后分别令t=0, 1/3, 2/3, 1 计算上述式子即可**

 **当t＝0时**

 **P(0)= 0 0 0 1 0 6 6**

 **0 -9 -9**

 **3 3 3**

 **0 0 0**

 **= 0 0 0**

 **当t＝1/3时**

 **P(1/3)= 1/33 1/32  1/3 1 0 6 6**

 **0 -9 -9**

 **3 3 3**

 **0 0 0**

 **= 1 2/9 2/9**

**当t＝2/3时**

 **P(2/3)= (2/3)3 (2/3)2 2/3 1 0 6 6**

 **0 -9 -9**

 **3 3 3**

 **0 0 0**

 **= 2 -2/9 2/9**

**当t＝1时**

 **P(0)= 1 1 1 1 0 6 6**

 **0 -9 -9**

 **3 3 3**

 **0 0 0**

 **= 3 0 0**

**11．已知由P1（0，0，0）,P2（2，2，-2）,P3（2，-1，-1）,P4（3，0，0）,Q1（4，0，0）,Q2（6，-2，1）,Q3（8，-3，2）,Q4（10，0，1）确定的两段三次Bezier曲线，试求其在P4(Q1)处达到C1连续的条件**

**解：**设两段连续的三次Bezier曲线分别为：

 P(t), Q(t) t∈[0 1]

 则 **P(t1)=(1-t1)3P1+3t1(1-t1)2P2+3t12(1-t1)P3+t13P4**

t1∈[0 1]

 **Q(t2)=(1-t2)3Q1+3t2(1-t2)2Q2+3t22(1-t2)Q3+t23Q4**

 t2∈[0 1]

将P1、P2、P3、P4的分量分别代入P(t)得到相应的分量

 Px(t)= **(1-t)3\*0 + 3t(1-t)2\*2 + 3t2(1-t)\*2 + t3\*4**

 **= 4t3 – 6t2 + 6t**

 Py(t)= **(1-t)3\*0 + 3t(1-t)2\*2 + 3t2(1-t)\*(-1) + t3\*0**

 **= 9t3 – 15t2 + 6t**

 Pz(t)= **(1-t)3\*0 + 3t(1-t)2\*(-2) + 3t2(1-t)\*(-1) + t3\*0**

 **= -3t3 + 9t2 - 6t**

 即三次Bezier曲线的矩阵式为：

 P(t)= [t3 t2 t 1] 4 9 -3 0

 -6 -15 9 0

 6 6 -6 0

 0 0 0 0

将Q1、Q2、Q3、Q4的分量分别代入Q(t)得到相应的分量

 Qx(t)= **(1-t)3\*4 + 3t(1-t)2\*6 + 3t2(1-t)\*8 + t3\*10**

 **= 6t + 4**

 Qy(t)= **(1-t)3\*0 + 3t(1-t)2\*(-2) + 3t2(1-t)\*(-3) + t3\*0**

 **= 3t3 + 3t2 - 6t**

 Qz(t)= **(1-t)3\*0 + 3t(1-t)2\*1 + 3t2(1-t)\*2 + t3\*1**

 **= -2t3 + 3t**

 即三次Bezier曲线的矩阵式为：

 Q(t)= [t3 t2 t 1] 0 3 -2 0

 0 3 0 0

 6 -6 3 0

 4 0 0 4

 P(t)和Q(t)在P4(Q1)处达到C1连续的条件是：

 P(1)和Q(0) 在P4(Q1)处重合，且其在在P4(Q1)处的切矢量方向相同，大小相等

 即：

 P（t=1） = Q（t=0）

 P’（t=1） = Q’（t=0）

**12、把上题定义的二段三次Bezier曲线经过一次分割后，试求它们相应特征多边形的顶点坐标序列。**

解：顶点坐标序列如图：

P1

P2 P11

P3 P21 P12

P4 P31 P22 P13

Q2 Q11

Q3 Q21 Q12

Q4 Q31 Q22 Q13

其中Pi r (t1)=（1-t）Pi r-1 (t1)+ t Pi+1 r-1 (t1) r=1,2,3; i=1,2,3

**17、已知P00=[0.25,0], P10=[0.75,0],P01=[0.75,0.9],P11=[0.25,0.8]四点，试用它们构造一张双线性曲面，并用程序输出该双线性曲面。**

 解：一次双线性曲面参数方程为：

 P00 P01 1-v

 Q(u, v)=[1-u, u] P10 P11 v

 [0.25,0] [0.75,0.9] 1-v

 =[1-u, u] [0.75,0] [0.25,0.8] v

 即：

Q(u, v)=（1-u）(1-v) P00+u (1-v) P10+（1-u）v P01+uv P11

=（1-u）(1-v) [0.25,0]+u (1-v) [0.75,0]+（1-u）v [0.75,0.9]+u v[0.25,0.8]

即：

X(u, v)= 0.25 (1-u）(1-v) +0.75u (1-v) +0.75（1-u）v+0.25u v

 Y(u, v)= 0 (1-u）(1-v) + 0 u (1-v) + 0.9（1-u）v+ 0.8u v 0≤u≤1; 0≤v≤1

 它其实是一个马鞍面（双曲抛物面）上的一块曲面片。

 P01 P11

 P00 P10