3

解析函数的级数表示

高阶导数的Cauchy公式

$$\oint_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z)$$

可用于计算一些定积分，其中 $f(z)$ 必须在闭合回路围成的区域内解析。

把被积函数的不解析部分归结到 $\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}$ 中。

但是一般函数的积分如何计算？或者说能否将非解析部分归结为 $\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}$。

另一方面，我们已求得：$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i\,\delta_{n,1}$

如何利用这一性质？若能将 $f(z)$ 写成以下的级数形式，似乎即可求出积分

$$f(z) \xrightarrow{????} \sum_n c_n (z-a)^n$$

因此，本章涉及的问题：

- 函数的级数表示：函数写成无穷项幂函数之和
- 求积分和无穷项的求和次序对调
- 函数的奇异性（非解析特性）用 $\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}$ 形式来描述

3.1 复变函数项级数

为讨论函数的幂函数级数表示，先讨论一般函数项级数。

复变函数级数的敛散性

- 复变函数级数：无穷级数，每一项都是一个复变函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \ldots$$

- 收敛：

  部分和：$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k(z)$　　有限项求和一定收敛 （其实也不必引入收敛的概念 ）

  如果极限 $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ 对某一点 z 存在，则称

  复变函数级数在 z 点收敛。$S(z)$ 称为级数在 z 点的和。

因为 $w_k(z) = u_k(x, y) + i\, v_k(x, y)$，故复变函数级数可视为两个二元实变函数级数 ，

复函数级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 两二元实函数级数收敛 。

$\sum_k w_k(z)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_k u_k(x, y)$ 和 $\sum_k v_k(x, y)$ 都收敛

- 收敛的必要条件：

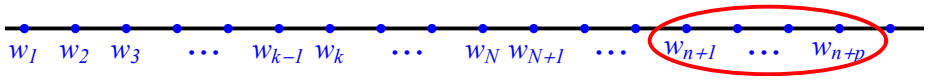
$$\lim_{k\to\infty} w_k(z) = 0 \tag{1.1}$$

证明：$\lim_{k\to\infty} w_k(z) = \lim_{k\to\infty} [S_k(z) - S_{k-1}(z)] = \lim_{k\to\infty} S_k(z) - \lim_{k\to\infty} S_{k-1}(z) = S(z) - S(z) = 0$

- 收敛的充要条件—— Cauchy判据

$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N(\varepsilon, z)$，使得当 $n > N(\varepsilon, z)$ 时，对任意自然数 p，均有

$$| S_{n+p}(z) - S_n(z) | = \left| \sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z) \right| < \varepsilon$$



- 收敛的必要条件 (1.1)式：$\lim_{k\to\infty} w_k(z) = 0$ 对应于 $p = 1$。

绝对收敛

定义： $\sum_{k=0}^{\infty} |w_k(z)|$ *在 z 点收敛，则称级数* $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ *在 z 点绝对收敛。*

若级数本身收敛，各项加绝对值之后的级数不收敛，则称条件收敛。

- 若级数绝对收敛，则该级数一定收敛，反之不然。

- 收敛的判别法 （与实变函数相同，因为加绝对值之后就变为实函数了）

  - 比值法：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|w_{n+1}(z)|}{|w_n(z)|} = q \quad \begin{cases} q < 1, & \text{绝对收敛} \\ q > 1, & \text{发散} \\ q = 1, & \text{不确定} \end{cases}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|w_{n+1}(z)|}{|w_n(z)|} < 1 \quad \text{绝对收敛}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|w_{n+1}(z)|}{|w_n(z)|} > 1 \quad \text{发散}$$

  - 根式法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n(z)|} = q \quad \begin{cases} q < 1, & \text{收敛} \\ q > 1, & \text{发散} \\ q = 1, & \text{不确定} \end{cases}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|w_n(z)|} = q \quad \begin{cases} q < 1, & \text{收敛} \\ q > 1, & \text{发散} \\ q = 1 & \text{不确定} \end{cases}$$

  - 高斯法，当比值法遭遇 $q = 1$ 时常用，当 n 足够大时

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n^\lambda}\right),\ \lambda > 1 \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\,\mu > 1 & \text{收敛} \\ \mathrm{Re}\,\mu \le 1 & \text{发散} \end{cases}$$

注意区别：高斯法中看 $\frac{w_n}{w_{n+1}}$　　比值法中看 $\left|\frac{w_{n+1}(z)}{w_n(z)}\right|$

- 比较法

$\sum_n |v_n|$ 收敛且 $|u_n| \le |v_n|$，则 $\sum_n |u_n|$ 收敛

$\sum_n |v_n|$ 发散且 $|u_n| \ge |v_n|$，则 $\sum_n |u_n|$ 发散

■ 绝对收敛的性质

- 各项次序可任意调换，级数仍绝对收敛且级数和不变

▲ 非绝对收敛级数的求和不一定能任意改变次序

$I = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$　非绝对收敛，

以下推导错误，因为只有绝对收敛才可以改变求和顺序　（加法交换律？）

$$I = \left(1 + \frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{6} + \ldots.\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) - 2\times\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots.\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.\right) = 0$$

实际上 $I = \ln 2$

```
Sum[(-1)^(n-1)/n, {n, 1, ∞}]
```

```
Log[2]
```

- 可逐项相乘，下式右边仍为绝对收敛级数（乘法分配率与交换律？）

$$\left(\sum_k u_k\right)\left(\sum_l v_l\right) = \sum_k \sum_l u_k\, v_l$$

⊖ 例题，类似于实函数级数

试证：当 $|z| < 1$，　$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

证明：利用比值法 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z^k}{z^{k-1}}\right| = |z| < 1$ 时，级数绝对收敛

$S_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n$，　$z\,S_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^{n+1}$

二者相减：$(1-z)\,S_n(z) = 1 - z^{n+1}$　（这里用到加法交换律，对绝对收敛级数是可行的 。）

两边取极限：$\lim_{n\to\infty}(1-z)\,S_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - z^{n+1}\right) = 1$

$$(1-z)\lim_{n\to\infty} S_n(z) = 1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 1,\quad S(z) = \frac{1}{1-z}$$

一致收敛

一致：显然应是对某区域或某条曲线而言，不是对一点而言。不同于前述的收敛与绝对收敛。

一致收敛概念在积分中有重要应用。

定义：级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 的每一项在区域 D 或曲线 L 上有定义

$\forall\, \varepsilon > 0$, 存在与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对任意 $z \in D$ 或 $z \in L$，均有

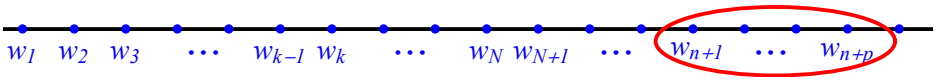
$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, 其中：$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k(z)$

则称级数在区域 D 或曲线 L 上一致收敛于 $S(z)$。

■ 一致收敛的充要条件（Cauchy 判据）： 与收敛比较，仅在于 N 与 z 无关

$\forall\ \varepsilon > 0$， $\exists\ N(\varepsilon)$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对任意 $z \in D$ 或 $z \in L$，对任意自然数 p，均有

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$$



- 注意区别绝对收敛和一致收敛，前者可以对点 z 定义，后者仅对区域或曲线而定义；
- 一致收敛与收敛的区别：找到一个对 $z \in D$ 或 $z \in L$ 与 z 无关的（最大的） N。
- 比较一致收敛与非一致收敛的充要条件：

▲ 一致收敛的充要条件：

$\forall$ （任意） $\varepsilon > 0$， $\exists$（一个） $N(\varepsilon)$，

使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时 （对任意的 $n > N$），对任意 $z \in D$ 或 $z \in L$，对任意自然数 p，均有

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$$

▲ 收敛但不是一致收敛的充要条件：

存在一个 $\varepsilon_0 > 0$， 对任意正整数 N，都存在一个 $n_0 > N$ 及某点 $z_0 \in D$ 或 $z_0 \in L$，使得对某个自然数 p_0，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p_0} w_{n+k}(z)\right| \geq \varepsilon_0$$

例题：绝对收敛但不是一致收敛例

级数 $\sum_k \left(z^{k-1} - z^k\right)$ 在区域 $|z| < 1$

解：由比值判别法

$\left|\frac{w_{k+1}(z)}{w_k(z)}\right| = |z| < 1$， $\Longrightarrow$ 绝对收敛

试试看能不能证明一致收敛 。

用 $\varepsilon - N$ 判别：$\forall\, \varepsilon > 0$, 需要导出存在 N，使得对任意 $n > N$，$\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$ 成立

也就是导出使 $\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$ 成立的充分条件 $n > N$，且 N 与 z 无关。

$\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon \iff |z^n|\,|1-z^p| < \varepsilon$，在区域 $|z| < 1$ 有 $|1-z^p| < 2$

$\Leftarrow 2|z^n| < \varepsilon \Leftarrow n > \dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln |z|} = N(\varepsilon, z)$ 找到 N，因此级数是收敛的 。

但，是否一致收敛？需要找一个与 z 无关的 N，或者说对 $|z| < 1$，找一个 N 的最大值。

由 $N(\varepsilon, z) = \dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln |z|}$，对 $|z| < 1$ 区域，似乎找不到最大的 $N(\varepsilon)$，应该不是一致收敛 。

是否一定找不到最大的 $N(\varepsilon)$，当然需要证明 。

证法一：利用 收敛但不是一致收敛的充要条件 证明该级数非一致收敛 。

对 $\varepsilon_0 = 0.1$，对任意整数 N，都存在某个 $n_0 > N$,

某个自然数 p_0 和 某个点 $|z_0| < 1$，使得 $\left|\sum_{k=1}^{p_0} w_{n+k}(z)\right| \geq \varepsilon_0$。

取 $p_0 = 1$，$z_0 = -1 + \delta$ with $\delta = 10^{-M} > 0$，这时对 $n_0 = N + 1$

$\left|\sum_{k=1}^{p_0} w_{n+k}(z)\right| = \left|z^{N+1} - z^{N+2}\right| = (1-\delta)^{N+1}\,|2-\delta| > |1-\delta|^{N+1}$

对任意给定的正整数 N，只要 M 足够大，δ 就足够小，

就可以使 $\left(1-10^{-M}\right)^{N+1} \sim 1-(N+1)\,10^{-M} > \varepsilon_0 = 0.1$

故在 $|z| < 1$，原级数不是一致收敛 。

这里的关键在于如果 N 与 z 无关，z 改变 （δ 变、M 变） 时 N 不能随之改变 。

证法二：利用反证法 证明该级数非一致收敛 。

设该级数一致收敛 ，那么对任意 ε，均可找到一个与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时，

对任意自然数 p 与满足 $|z| < 1$ 的 z，均有：$\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$。 (1.2)

下用反证法证明 ，对 $p = 1$ 就不满足 。

对 $n = N + 1$, $p = 1$，取 $z_0 = -1 + 10^{-M}$。显然对任意正整数 M，z_0 均满足 $|z_0| < 1$。

$p = 1$ 时，(1.2) 式退化为：

$\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z_0)\right|_{p=1} = \left|z_0^{N+1} - z_0^{N+2}\right| = \left(1-10^{-M}\right)^{N+1}\left|2-10^{-M}\right| > \left(1-10^{-M}\right)^{N+1}$

因为 N 与 z 无关，M 变化时，N 不变，因此对那个找到的与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，我们可以取足够大的 M，

使得 $\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right|_{p=1} > \left(1-10^{-M}\right)^{N+1} > \varepsilon$，这就与 (1.2) 式相矛盾 。

故找不到与 z 无关的 N。该级数不可能是一致收敛的 。

理解 （注意，这里的理解并非数学证明 ）：前面已求得 $N(\varepsilon, z) = \dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln |z|}$ 与 z 有关，

接着应该在区域 $|z| < 1$ 内找到一个最大的 N。

显然，在区域 $|z| < 1$ 内，$\dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln |z|}$ 无最大值 （因为 $|z|$ 可以无限接近于 1）。

若在 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 区域，$N(\varepsilon, z) = \dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln |z|}$ 在此区域可取最大值 ，

对应于 $|z| = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{\ln \varepsilon/2}{\ln 1/2} = N(\varepsilon)$ 与 z 无关。

例题：一致收敛但不是绝对收敛例：

级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k}$ 在曲线 L：$\begin{cases}0\le x\le 1\\ y=0\end{cases}$ 上

比值法：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|=|z| \implies$ 在 $|z|<1$ 区域绝对收敛 。

在 $z=1$ 点，$|w_n|=\frac{1}{n}$，发散， 或应用高斯法

$$\frac{|w_n|}{|w_{n+1}|}=1+\frac{1}{n}=1+\frac{\mu}{n}+o\left(\frac{1}{n^\lambda}\right),\quad \lambda>1,\quad \mathrm{Re}\,\mu=1 \text{ 发散}$$

原级数在 L 上并非绝对收敛级数 。

下证明它在 L 上一致收敛

$\forall\,\varepsilon>0$, 要找一个与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，使得

当 $n>N$ 时，对任意自然数 p，$I=\left|\sum_{k=1}^{p}w_{n+k}(z)\right|<\varepsilon$。

现必须从 $I<\varepsilon$ 出发导出 $n>N(\varepsilon)$。在 L 上

$$I=\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{z^{n+2}}{n+2}+\frac{z^{n+3}}{n+3}-\frac{z^{n+4}}{n+4}+\ldots$$
$$=\frac{z^{n+1}}{n+1}\left[1-\frac{(n+1)}{(n+2)}z+\frac{(n+1)}{(n+3)}z^2-\frac{(n+1)}{(n+4)}z^3+\ldots\right]$$

中括号内，当 z 在 L 上时，第一项大于第二项 ，第三项大于第四项 ...，因此，

若总项数 p 为偶数，必大于 0，即任意偶数项之和大于 0（对 z 在 L 上）

若总项数 p 为奇数，因偶数项之和 >0，最后一项也 >0，总和仍 >0

故：中括号内各项之和大于 0。

又：对 z 在 L 上，每一项的绝对值都比后一项大 ，

故：前 $(2m-1)$ 项之和 <1，前 $2m$ 项之和小于前 $(2m-1)$ 项之和，

因此，中括号内各项之和大于 0 小于 1，故 $I<\frac{|z|^{n+1}}{n+1}<\frac{1}{n+1}$

$I<\varepsilon \impliedby \frac{1}{n+1}<\varepsilon \impliedby n>\ln\frac{1}{\varepsilon}-1$，取 $N=\ln\frac{1}{\varepsilon}$ 即可，

N 与 z 无关（只要 z 在曲线 L：$\begin{cases}0\le x\le 1\\ y=0\end{cases}$ 上）

实际上 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k}=-\ln(1+z)$，对 $|z|\le 1$ 且 $z\ne -1$

该复数级数在 $|z|\le 1-\delta$ 闭区域一致收敛 （$\delta>0$，δ 很小）

```
Sum[(-1)^k z^k/k, {k, 1, ∞}]
```

```
-Log[1 + z]
```

- 借助 Mathematica，判断在闭区域 $|z|\le 1-\delta$，这个级数一致收敛

对 $|z|\le 1-\delta$（小量 $\delta>0$），Cauchy一致收敛判据中的任意连续的 p 项和要满足

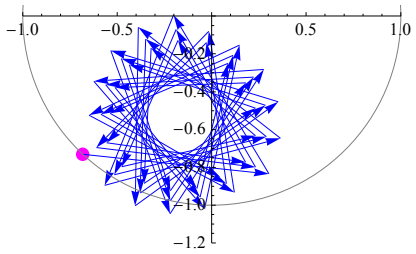
$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|=\left|\sum_{k=1}^{p}w_{n+k}(z)\right|<\varepsilon$$

可用 Mathematica 计算 $T_p(z,n)=(n+1)[S_{n+p}(z)-S_n(z)]$,

并验证 对任意自然数 p，$|T_p(z,n)|<M$（有界）

从而 $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = \dfrac{|T_p(z, n)|}{(n+1)} < \dfrac{M}{n+1} < \varepsilon \implies N = \dfrac{M}{\varepsilon}$

下图为 $T_p(z, n)$ 在 $z = e^{i\,127^\circ}$, $n = 100$, p 从 1 到 50 的值，箭号表示从 T_p 到 T_{p+1}，红色点为 T_1



当然，以上并非证明，但给我们一个图像：Cauchy 判据乘以 $(n+1)$ 在“兜圈”，

这种“兜圈”形式的级数之敛散性的证明将在下节讨论 。

■ 内闭一致收敛：在开区域 D 内的任意闭区域（不包含 D 的边界）一致收敛，称在开区域 D 上 内闭一致收敛。

- 闭区域解析：从闭区域扩展到开区域。即：能找到一个包含闭区域的开区域，在这个开区域内，函数解析。

  内闭一致收敛：从开区域塌缩到闭区域 。在开区域内的任何一个闭区域上一致收敛 。
- 在开区域 D 内一致收敛则一定在 D 内闭一致收敛（存在 N 的最大值），反之不然。
- 例： 级数 $\sum_k z^k$ 在 $|z| < 1$ 区域绝对收敛 、内闭一致收敛，但在开区域 $|z| < 1$ 不是一致收敛 。

■ 一致收敛实用判别法：

- 若常数项 （每一项均为常数 ） 级数 $\sum_k m_k$ 每一项均大于 0 且级数收敛，

  并且，若对任意 k，在区域 D 或曲线 L 上，恒有 $|w_k(z)| \le m_k$，

  则级数 $\sum_k w_k(z)$ 在 D 或 L 上一致且绝对收敛 。级数 $\sum_k m_k$ 常被称为 $\sum_k w_k(z)$ 的 优级数
- 在区域 D 或曲线 L 上：级数 $\sum_k w_k(z)$ 一致收敛且函数 $|v(z)| < M$ （常数），

  则级数 $\sum_k v(z)\, w_k(z)$ 在 D 或 L 上一致收敛 。

▲ 要判断一致收敛：(1) 找优级数；(2) 把级数的每一项写成一个一致收敛的级数与一个有界函数之积。

▲ 级数 $\sum_k z^k$ 在 $|z| < 1$ 区域内找不到优级数，但在任何 $r < 1$ 的闭区域 $|z| \le r$，

可找到优级数： $\sum_k q^k$, $r < q < 1$，故它是内闭一致收敛 。

■ 一致收敛级数的性质

- 连续性（逐项求极限）

  若级数 $\sum_k w_k(z)$ 在区域 D 内满足：*a.* 每一项连续；*b.* 一致收敛，则其和函数

  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 在 D 内连续，即：（蓝色部分为逐项求极限 ）

  $\lim_{z\to z_0} S(z) = S(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z\to z_0} w_k(z)$

  证明： 须证明对任意 $z \in D$，当 $z \to z_0$ 时， $S(z) \to S(z_0)$

  即：应证明 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta,$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，$I = |S(z) - S(z_0)| < \varepsilon$。

  论证步骤：从 $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \impliedby |z - z_0| < \delta\ (\varepsilon)$

$I = |S(z) - S(z_0)| = |S(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)|$

$I < |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - S(z_0)|$

因为一致收敛，故 $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists$ 与 z 无关的 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时

$|S(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ （因为级数一致收敛，故对 z 与 z_0，N 相同）

$|S(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ （因为一致收敛）

每一项连续，有限项之和必连续，对 $\varepsilon/3$, $\exists$ δ, 使得

$|z - z_0| < \delta$ 时，$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

综上，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ δ，使得 $|z - z_0| < \delta$ 时

$I = |S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \implies S(z)$ 连续

▲ 一致收敛是和函数连续的充分条件。

▲ 若非一致收敛，则不一定能保证和函数连续。

反例： 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[x^{k-1} - x^k\right]$

在 $|x| < 1$ 收敛，在 $x = 1$ 也收敛

在 $0 \le x \le 1$ 收敛，但并非一致收敛

$S(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1, \quad 0 \le x < 1$ （绝对收敛，故可以这样写成两个级数）

$S(1) = 0, \quad \lim_{x\to 1} S(x) = 1 \neq S(1)$ 级数 $S(x)$ 不连续

反例： 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z^{k+1}}{k+1} - \frac{2\,z^{2k+3}}{2k+3}\right]$

在直线段 L：$\begin{cases} y = 0 \\ -1 < x \le 1 \end{cases}$ 收敛（试证之）

实际上它至少在圆心于原点的右半单位圆 $\overline{D}$ 收敛。

可以证明，它在 L 上不是一致收敛，

$S(z) = 2z - \ln[z+1]$

$\lim_{z\to 1} S(z) = 2 - \ln 2$ 而 $S(1) = 2 - \ln 4$

$\lim_{z\to 1} S(z) \neq S(1)$ 尽管在 $\overline{D}$ 上收敛

```
z0 = 1 - δ 0;
Sum[z^(k+1)/(k+1) - 2 z^(2 k+3)/(2 k+3), {k, 0, ∞}] // FullSimplify
t1 = Limit[%, z → z0]
t2 = Sum[(z0^(n+1)/(n+1) - 2 z0^(2 n+3)/(2 n+3)), {n, 0, ∞}] // FullSimplify
```

```
2 z - Log[1 + z]
```

```
2 - Log[2]
```

```
2 - Log[4]
```

▲ 是否绝对收敛影响加法交换律在级数中的应用，是否一致收敛影响连续函数之和依然连续在级数中的应用。

- 逐项求积

若级数 $\sum_k w_k(z)$ 在曲线 L 上满足：$a.$ 每一项连续；$b.$ 一致收敛，则：

$$\int_L \left[\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\right] dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_L w_k(z)\, dz, \quad \text{求积与求和可以交换次序}$$

证明： 在 L 上一致收敛，故在 L 上和函数 $S(z)$ 连续，可积。

$$\text{对有限项：} \int_L S_n(z)\, dz = \int_L \left[\sum_{k=0}^{n} w_k(z)\right] dz = \sum_{k=0}^{n} \int_L w_k(z)\, dz \tag{1.3}$$

思考：下面的证明错在哪里 ？

(1.3) 两边同取极限： $\lim_{n\to\infty} \int_L \left[\sum_{k=0}^{n} w_k(z)\right] dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_L w_k(z)\, dz$

$$\text{左} = \lim_{n\to\infty} \int_L \left[\sum_{k=0}^{n} w_k(z)\right] dz = \int_L \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} w_k(z)\, dz = \int_L \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\, dz$$

$$\text{右} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_L w_k(z)\, dz \quad \Longrightarrow \quad \text{左} = \text{右}, \text{ 得：} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_L w_k(z)\, dz$$

正确的证明：因为一致收敛，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 与 z 无关的 $N(\varepsilon)$,

当 $n > N$ 时，对任意 $z \in L$, 均有 $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$

$$(1.3)\text{ 左} = \int_L S(z)\, dz + \int_L [S_n(z) - S(z)]\, dz = \int_L S(z)\, dz + I$$

$$I = \int_L [S_n(z) - S(z)]\, dz, \quad \text{因为一致收敛，} \exists \text{ 与 } z \text{ 无关的 } N(\varepsilon),$$

故无论 z 在 L 上如何变，均有 $n > N$ 时， $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \implies |I| < \varepsilon\, l$ 或 $\lim_{n\to\infty} I = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \text{左} = \lim_{n\to\infty} \text{右} \quad \Longrightarrow \quad \int_L \left[\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\right] dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_L w_k(z)\, dz$$

▲ 若加上 $w_k(z)$ 在 D 内解析，则级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{z_0}^{z} w_k(z)\, dz$ 也一致收敛 。（试证之 ）

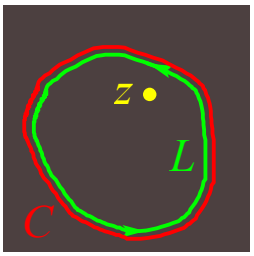
- 逐项求导（Weierstrass 定理）

若级数 $\sum_k w_k(z)$ 在区域 D （边界为 C，如图） 内满足：a. 每一项解析；b. 内闭一致收敛，则：

a. $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 在 D 内解析

b. $S^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ （逐项求导）

c. $\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ 内闭一致收敛 （求导后的级数仍内闭一致收敛 ）



a. 先证明 $S(z)$ 解析

$w_k(z)$ 解析 $\Longrightarrow$ $w_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{w_k(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\oint_L \phi_k(\xi)\,d\xi$,

L 为 D 内包围 z 点的一条闭合回路，

注意因为 $z\in$ 开区域 D，故一定可在 D 内在找到一条 L 使之包围 z 点

$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)$ 内闭一致收敛，故它在 L 上一致收敛，而 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\xi-z}$ 有界，

因为一致收敛级数每一项乘以一有界函数得到的新级数仍一致收敛 （判别法二）

故级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(\xi)$ 在积分路径 L 上也一致收敛。求积与求和可交换次序 。

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\oint_L \phi_k(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_k(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$$S(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{1}{\xi-z}\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{S(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

因为 $w_k(z)$ 解析且 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 一致收敛，故 $S(\xi)$ 连续，

$S(z)$ 表为 Cauchy型积分，必然解析。

b. 再证明逐项求导

由上一步，$S(z)$ 在 D 内表为 Cauchy型积分，故

$$S^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$$

$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)$ 一致收敛，$\frac{n!}{2\pi i}\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}$ 有界，故

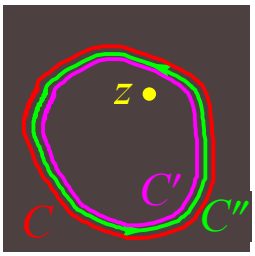
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\frac{w_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)$ 也一致收敛，求和与求积分可交换次序 ，

再利用高阶导数Cauchy公式

$$S^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{w_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi=\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$$

c. 最后证明 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ 内闭一致收敛

需要证明 D 内的边界为 C' 的任一闭区域 $\overline{D}'$ 上级数一致收敛 。
对 D 内任一闭区域 $\overline{D}'$，可在 D 内取 $\overline{D}''$（边界为 C''） 包含 $\overline{D}'$
因为 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 内闭一致收敛，故它在闭区域 $\overline{D}''$ 上一致收敛
也即：$\forall \varepsilon > 0$，存在 N，使得 $n > N$ 时，对任意自然数 p
对任意 $z \in \overline{D}''$，均有 $\left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$



$$I = \left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}^{(m)}(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} \frac{m!}{2\pi i} \oint_{C''} \frac{w_{n+k}(\xi)}{(\xi - z)^{m+1}} d\xi\right|$$ 一致收敛，求积求和次序可调

$$I = \frac{m!}{2\pi} \left|\oint_{C''} \sum_{k=1}^{p} \frac{w_{n+k}(\xi)}{(\xi - z)^{m+1}} d\xi\right|,$$ C'' 为 $\overline{D}''$ 的边界

$$I \le \frac{m!}{2\pi} \oint_{L''} \left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(\xi)\right| \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^{m+1}}$$

$$I \le \frac{m!}{2\pi} \varepsilon \oint_{L''} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^{m+1}} \le \frac{m!}{2\pi} \varepsilon \frac{l''}{d^{m+1}},$$ l'' 为 L'' 的长度

d 为 L'' 到 z 的最近距离 。

3.2 幂级数

以 b 为中心的幂级数，形式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k = a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + a_3(z-b)^3 + \ldots + a_k(z-b)^k + \ldots$$

收敛圆

Abel第一定理：若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 在 $z = z_0$ 收敛，则在以 b 点为圆心，

$|z_0 - b|$ 为半径的圆内绝对收敛，且在 $|z-b| \le q|z_0 - b|$ 上一致收敛，其中 $0 < q < 1$。

证明：因为级数收敛，一般项必趋于 0

$$\lim_{k\to\infty} a_k (z_0 - b)^k = 0$$

故：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得当 $k > N$ 时

$$\left|a_k (z_0 - b)^k\right| < \varepsilon$$

对 $k \le N$ 的有限项，一定有界；

所以 $\left|a_k (z_0 - b)^k\right| < M$, 对任意 k

对 $|z-b| \le q|z_0 - b|$, $0 < q < 1$

$$\left|a_k (z-b)^k\right| = \left|a_k (z_0 - b)^k\right| \left(\frac{|z-b|}{|z_0 - b|}\right)^k < M\rho^k$$

正项 $M\rho^k$ 收敛，是原幂级数的优级数 ，故

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 在 $|z-b| \le q|z_0 - b|$ 绝对且一致收敛 。

- 推论：若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 在 $z = z_1$ 发散，则在 $|z-b| > |z_1 - b|$ 处处发散 。

证明：反证法，若在 $|z-b|>|z_1-b|$ 的某一点 z_2 收敛，
由 Abel 第一定理，则在 $|z-b|<|z_2-b|$ 均收敛
而 $|z_1-b|<|z_2-b|$，故在 $z=z_1$ 点应收敛，
与条件 $z=z_1$ 发散矛盾。故在 $|z-b|>|z_1-b|$ 处处发散。

- 推论：幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$ 必存在收敛圆，圆内收敛，圆外发散，圆周尚未知。

收敛圆内的性质

- 收敛圆内和函数解析，且可逐项求导。

  因为满足：级数的每一项解析且圆内内闭一致收敛

- 圆内任意曲线的积分可逐项求积。

  因为满足：级数的每一项解析且圆内内闭一致收敛

- 幂级数逐项求导或求积，收敛圆半径不变（但圆周上的性质可能会改变）

  收敛圆内内闭一致收敛，可逐项求积，逐项求积后的新级数也一致收敛（一致收敛性质），故逐项求积后的级数收敛半径 R_i 不小于原收敛半径 R

  $$R_i \geq R$$

  收敛圆内内闭一致收敛，可逐项求导，逐项求导后的新级数也一致收敛（一致收敛性质），故逐项求导后的级数收敛半径 R_d 不小于原收敛半径 R

  $$R_d \geq R$$

  逐项求积、再逐项求导，得到原级数，故

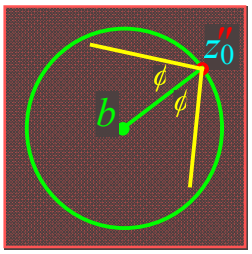
  $$R=(R_i)_d,\ \text{但}\ \ (R_i)_d \geq R_i \geq R \implies R \geq R_i \geq R \implies R=R_i$$

  因为 $R_i=R$，$R=(R_i)_d=R_d$

  - 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$，逐项求导变为 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$，逐项求积变为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k(k+1)}$，在 $z=\pm 1$ 的敛散性不同。

- Abel第二定理：幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$ 在收敛圆内收敛于 $S(z)$，

  在收敛圆周上的某点 z_0 点也收敛于 $S(z_0)$，则当 z 从收敛圆内在张角 $\phi<\pi/2$ 的范围内趋于 z_0 时，$S(z)$ 仍趋于 $S(z_0)$



  收敛圆内，级数一致收敛，故 $S(z)$ 连续，
  收敛圆周上，尽管在某段曲线上级数收敛，但并一定一致收敛，故 $S(z)$ 不一定连续，
  也即不能保证无论 z 以何种方式趋于 z_0，$S(z)$ 都趋于 $S(z_0)$，
  Abel第二定理说明 z 以何种方式趋于 z_0 时，能保证 $S(z)$ 趋于 $S(z_0)$。

收敛半径的求法

- 比值法： $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}(z)}{w_k(z)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-b| = q \Longrightarrow \begin{cases} q>1 & \text{发散} \\ q<1 & \text{收敛} \end{cases}$

  故收敛半径 $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

- 根值法： $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|w_k(z)|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\,|z-b| = q \Longrightarrow \begin{cases} q>1 & \text{发散} \\ q<1 & \text{收敛} \end{cases}$

  故收敛半径 $R = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

- 奇点法：离 b 点最近的奇点到 b 点的距离

例题：求级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^{\ln k} z^k$ 的收敛半径

解：根值法： $R^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left|k^{\ln k}\right|^{1/k} = \lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{\ln k}{k}} = \infty^0$

利用幂函数的定义： $R^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{\ln k}{k}\ln k} = 1$

比值法： $R = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln^2 k - \ln^2(k+1)}$

$$\ln^2 k - \ln^2(k+1) = \ln k(k+1)\ln\frac{k}{k+1} = \frac{\ln\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{\ln k(k+1)}} = \frac{0}{0}$$

应用洛必达法则： $R = 1$

```
Limit[k^(Log[k]/k), k → ∞]
Limit[Exp[Log[k] Log[k] - Log[k + 1] Log[k + 1]], k → ∞]
```

```
1
```

```
1
```

例题： 求级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(k+a^k\right)z^k$ 的收敛半径，其中 a 为实数。

解：分成 两个级数： $R_1 = 1$， $R_2 = \frac{1}{|a|}$

故： $R = \begin{cases} 1 & |a|<1 \\ \frac{1}{|a|} & |a|>1 \end{cases}$

或： $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k+a^k}{k+1+a^{k+1}}\right| = \begin{cases} 1 & |a|<1 \\ \frac{1}{|a|} & |a|>1 \end{cases}$

例题：求下列级数的收敛半径，并讨论收敛圆圆周上的性质

$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^q}$　其中实常数 $q\geq 0$，这个级数也称为 polylogarithm function，记为：$\mathrm{Li}_q(z)$

解：$\lim_{k\to\infty}\frac{|w_{k+1}|}{|w_k|}=\lim_{k\to\infty}|z|\left(\frac{k}{k+1}\right)^q=|z|\begin{cases}<1 & \text{收敛}\\ >1 & \text{发散}\end{cases}$

故：收敛半径 $R=1$。

在收敛圆圆周上，$|z|=1$

当 $q=0$ 时，$\lim_{k\to\infty}w_k(z)=\lim_{k\to\infty}z^k\neq 0$，　级数发散。

对 $q>0$，　比值法无法判断，用高斯法

$$\frac{|w_k|}{|w_{k+1}|}=\frac{1}{|z|}\left(1+\frac{1}{k}\right)^q=1+\frac{q}{k}+\frac{q(q-1)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2+\ldots$$

$q>1$ 时收敛 （原级数绝对收敛 ）

$q\leq 1$ 时发散 （这里只证明原级数不是绝对收敛 ）

小结：$\begin{cases}|z|<1 & \text{收敛圆内绝对收敛 （与 } q \text{ 无关）}\\ |z|=1 \text{ 且 } q>1 & \text{在圆周上，当 } q>1 \text{ 时也绝对收敛}\\ |z|=1 \text{ 且 } q\leq 1 & \text{在圆周上，当 } q\leq 1 \text{ 时非绝对收敛，但可能条件收敛}\end{cases}$

在圆周上，当 $q\leq 1$ 时如何判断敛散性 ？

以下证明：原级数 $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^q}$ 在 $q\leq 1$ 时，圆周上仅 $z=1$ 点发散，其它点 S 均条件收敛。

当 $z=1$ 时，看 $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q}$ 的每一项 w_k

$q\leq 1$ 时，$w_k=\frac{1}{k^q}>\frac{1}{k}$，因 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，故 S 发散。

在 $z\neq 1$ 的圆周上，要证明收敛，应利用收敛的充要条件 （Cauchy判据）

即：对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists N$, 使得当 $n>N$ 时，对任意自然数 p 及圆周上的 z，

$S_p=\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{k+n}}{(k+n)^q}$ 的绝对值 $|S_p|$ 均小于 ε。

如何证明？ 通过 $|S_p|<\varepsilon$ 反导出 $n>N$。

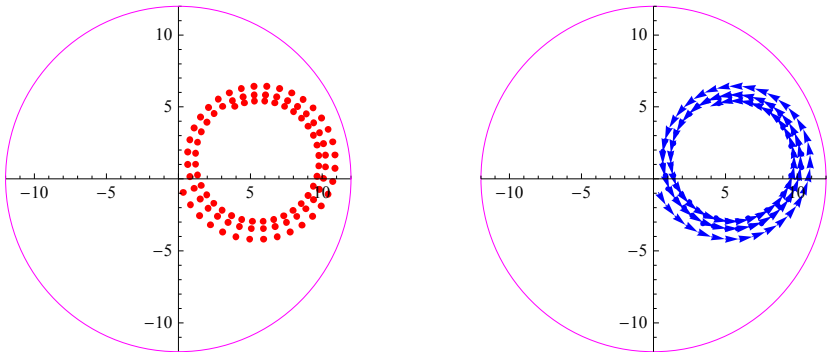
先看看 $(n+1)^q S_p$ 随 p 的变化，注意 $q\leq 1$。

```
w[k_, q_, z_] := z^k / k^q;  (* 级数的一般项 *)
Sp[z_, p_, q_, n_] := Sum[w[n + k, q, z], {k, 1, p}];

Sd[z_, q_, n_] := (n + 1)^q Table[{Re[Sp[z, p, q, n]], Im[Sp[z, p, q, n]]}, {p, 1, 100}];

θ0 = 10 Degree;
r0 = 1;
z0 = r0 e^(i θ0);  (* 圆周上的一点 *)
q0 = 1 / 2;
t = Sd[z0, q0, 100];
```

```
zr = 12;
g1 = ListPlot[t, PlotRange → {{-zr, zr}, {-zr, zr}}, AspectRatio → 1,
    PlotStyle → {PointSize[0.02], Red}, Epilog → {Magenta, Circle[{0, 0}, zr]}];
pt = Partition[N[t], 2, 1];
g2 = Graphics[{Blue, Map[Arrow, pt], Magenta, Circle[{0, 0}, zr]},
    PlotRange → {{-zr, zr}, {-zr, zr}}, AspectRatio → 1, Axes → True];
Grid[{{g1, Spacer[50], g2}}]
```



圆周上任取一点 （$z=1$ 点除外） 并任取一个不大于 1 的 q，

均再一次出现在某区域绕圈情况 （参见 上一节的例题 ）

即 $(n+1)^q S_p$ 有界 $\Longrightarrow$ $(n+1)^q |S_p| < M$，故只需 n 足够大，即可满足 $|S_p| < \varepsilon$

$$|S_p| < \frac{M}{(n+1)^q} < \varepsilon \quad \Longleftarrow \quad n > \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/q} = N$$

也就是说： $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N = \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/q}$，使得 $n > N$ 时，$|S_p| < \varepsilon$，满足 Cauchy 判据。

当然，以上并不构成数学证明 ，仅仅是一个启发 。那么数学上如何证明 $(n+1)^q |S_p|$ 有界？

绕圈形式的处理 ：

因为在圆周上且 $z \neq 1$，故令 $z = e^{i\phi}$，　$0 < \phi < 2\pi$，

$$S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{e^{i(k+n)\phi}}{(k+n)^q} = e^{i(n+1)\phi} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{e^{im\phi}}{(n+m+1)^q} = e^{i(n+1)\phi}\, T_p$$

$$T_p = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{e^{im\phi}}{(n+m+1)^q} = \sum_{m=0}^{p-1} \left(e^{im\phi} + e^{i(m-1)\phi}\,\theta(m-1)\right) \Big/ (n+m+1)^q - \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{i(m-1)\phi}\,\theta(m-1)}{(n+m+1)^q}$$

$$T_p = \sum_{m=0}^{p-1} \left(e^{im\phi} + e^{i(m-1)\phi}\,\theta(m-1)\right) \Big/ (n+m+1)^q - \sum_{m=0}^{p-2} \frac{e^{im\phi}}{(n+m+2)^q}, \quad \text{其中} \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$T_p = \sum_{m=0}^{p-1} \left(e^{im\phi} + e^{i(m-1)\phi}\,\theta(m-1) + e^{i(m-2)\phi}\,\theta(m-2)\right) \Big/ (n+m+1)^q - \sum_{m=0}^{p-2} \frac{e^{im\phi}}{(n+m+2)^q} - \sum_{m=0}^{p-2} \frac{e^{i(m-1)\phi}\,\theta(m-1)}{(n+m+2)^q}$$

以此类推， 目的在于把绕圈部分整合成 $L_m = e^{im\phi} + e^{i(m-1)\phi} + \ldots + e^{i\phi} + 1$ 形式

$$T_p = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{L_m}{(n+m+1)^q} - \sum_{m=0}^{p-2} \frac{L_m}{(n+m+2)^q}, \qquad \text{把 } m = p-1 \text{ 项独列}$$

$$T_p = \sum_{m=0}^{p-2} \left[\frac{L_m}{(n+m+1)^q} - \frac{L_m}{(n+m+2)^q}\right] + \frac{L_{p-1}}{(n+p)^q}$$

现需要证明对任意自然数 p，$(n+1)^q |T_p|$ 有界， （其中 $S_p = e^{i(n+1)\phi}\, T_p$） 而

$$|T_p| \le \left\{ \sum_{m=0}^{p-2} \left[\frac{1}{(n+m+1)^q} - \frac{1}{(n+m+2)^q} \right] |L_m| + \frac{|L_{p-1}|}{(n+p)^q} \right\}$$

因为 L_m 是绕圈项，必有界 （见下祥证） $|L_m| < l_{\max}$

$$|T_p| \le l_{\max} \left\{ \sum_{m=0}^{p-2} \left[\frac{1}{(n+m+1)^q} - \frac{1}{(n+m+2)^q} \right] + \frac{1}{(n+p)^q} \right\}$$

$$|T_p| \le \frac{l_{\max}}{(n+1)^q} \implies (n+1)^q |T_p| \le l_{\max} \quad \text{有界。}$$

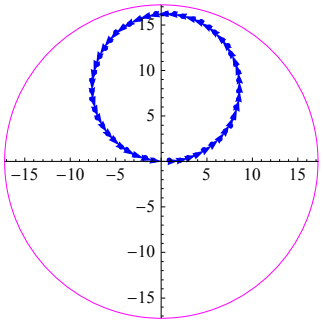
现在剩下最后一步： 需要证明 $|L_m|$ 对任意的 m 有界。

从图像上看， L_m 是绕圈的， 一定有界。

```
Lm[m_, ϕ_] := Sum[e^(i k ϕ), {k, 0, m}];
Sd[n_, ϕ_] := Table[{Re[Lm[m, ϕ]], Im[Lm[m, ϕ]]}, {m, 0, n}];

ϕ0 = 10/Sqrt[2] Degree;
t = Sd[50, ϕ0];
```

```
zr = 1/Sin[ϕ0 / 2] + 1;
pt = Partition[N[t], 2, 1];
g2 = Graphics[{Blue, Map[Arrow, pt], Magenta, Circle[{0, 0}, zr]},
  PlotRange → {{-zr, zr}, {-zr, zr}}, AspectRatio → 1, Axes → True]
```



从解析式上看：

$$L_m = \sum_{k=0}^{m} e^{i k \phi} = \frac{1 - e^{i (m+1) \phi}}{1 - e^{\phi}} = \frac{\sin \frac{(m+1)}{2} \phi}{\sin \frac{\phi}{2}} e^{i \frac{m}{2} \phi},$$

$$|L_m| \le \frac{1}{\sin \frac{\phi}{2}}, \quad \text{对 } 0 < \phi < 2\pi \text{ 的确是有界的 。}$$

例题：求收敛半径、级数和，并讨论收敛圆圆周上的性质

$$S(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k(k-1)}$$

收敛半径：比值法 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k-1}=1$

级数和： $S(z)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{z^k}{k(k-1)}$ 在收敛圆内内闭一致收敛 ， 可逐项求导 （求导后的级数依然内闭一致收敛 ）

$$S''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}z^{k-2}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m=\frac{1}{1-z},\qquad |z|<1$$

$$S'(z)=\int_{z_1}^{z}\frac{dz}{1-z}=-\ln(1-z)\Big|_{z_1}^{z}=-\ln(1-z)+c_1$$

由 $S'(z)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{z^{k-1}}{(k-1)}$， 知 $S'(0)=0\implies c_1=0$

$$S(z)=-\int_{z_2}^{z}\ln(1-z)\,dz \quad \text{分部积分}$$
$$=-[z\ln(1-z)]\Big|_{z_2}^{z}-\int_{z_2}^{z}\frac{z\,dz}{1-z}$$
$$=(1-z)\ln(1-z)+z+c_2$$

由 $S(0)=0\implies c_2=0$

$S(z)=(1-z)\ln(1-z)+z$ 在 $|z|<1$ 是解析函数 。

在收敛圆周上， 级数通项的绝对值 $|w_k(z)|=\dfrac{1}{k(k-1)}<\dfrac{1}{(k-1)^2}$,

存在优级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{(k-1)^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$， 故级数绝对收敛且一致收敛 。

级数在 $|z|\le 1$ 内绝对且一致收敛于 ： $S(z)=(1-z)\ln(1-z)+z$

- 级数的和函数 $S(z)$ 为多值函数形式，在求值时辐角 $\theta\equiv\arg(1-z)=?$

▲ 解析分析：

据定义： $S(z)=(1-z)\ln(1-z)+z,\quad \theta\equiv\arg(1-z)$
$=(1-z)(\ln|1-z|+i\,\theta)+z$

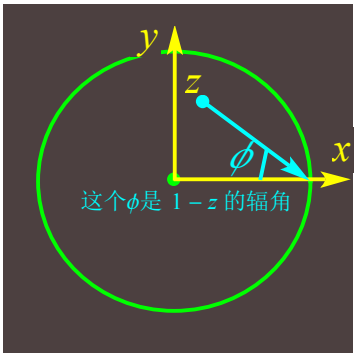
$z=0$ 时， 原级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{z^k}{k(k-1)}=0$， 从而： $S(0)=0$

$z=0$ 代入和函数 $S(z)\Big|_{z=0}=S(0)=i\,\theta=0$

也即， $z=0$ 时， $(1-z)$ 的辐角 $\theta\equiv\arg(1-z)$ 应为 0

当 z 取收敛圆内不为零的点时 ， $\theta\equiv\arg(1-z)=\phi$

如图所示， 逆时针为正 、顺时针为负： $-\dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{\pi}{2}$



试试看在圆内多绕几圈再到达 z_0 点，辐角如何变化 。

当 $z\to 1$ 时， $\arg(1-z)=?$， 会不会影响 $S(z)$ 的值， 为什么？

▲ ❀ *Mathematica* 实践

```
z0 = r e^(i ϕz) /. {r → 1, ϕz → 30 Degree};
t := Sum[z0^k / (k (k - 1)), {k, 2, 5000}];
(* 直接求和到k_max，以防程序先求出和函数(z)，再代入z0 求值 *)
N[t, 15]

S[z_] := Sum[z^k / (k (k - 1)), {k, 2, ∞}];
t = Simplify[S[z]]    (* ❀ Mathematica 可以求出其初等函数表达式 *)
N[t /. z → z0, 15]  (* 那么 ❀ Mathematica 认为 1-z 的辐角等于多少? *)

θ[z_] := Arg[z]; (* 注意此处❀ Mathematica 定义 -π< Arg[z] ≤ π *)
f[z_] := (1 - z) (Log[Abs[1 - z]] + i θ[1 - z]) + z;
N[f[z0], 15]
N[180/π θ[1 - z0]]  (* 原来 ❀ Mathematica 认为 1-z 的辐角等于75度与解析分析一样 *)
```

```
0.123307408423842 + 0.653867157937539 i
```

```
z - (-1 + z) Log[1 - z]
```

```
0.123307483049866 + 0.653867137881843 i
```

```
0.123307483049866 + 0.653867137881843 i
```

```
-75.
```

▲ 思考：你现在能否体会到为什么许多计算机语言将辐角主值定义在：$(-\pi, \pi]$ 而不是 $[0, 2\pi)$

3.3 解析函数的Taylor展开

幂级数在收敛圆内绝对且内闭一致收敛，据Weierstrass定理，其和函数是解析函数。

其实，我们更关心一个解析函数能否表为绝对且（内闭）一致收敛的幂级数，以便计算复积分。（一致收敛是为了保证能逐项求积分）

♀ 解析函数的Taylor展开定理

展开定理：设 $f(z)$ 在以 b为圆心的一个圆域 $|z-b|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 可在圆内任意点 z展开为在该圆内绝对收敛且内闭一致收敛的 Taylor级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(z-b)^k,\quad a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-b)^{k+1}},\ C\text{ 为圆内包围 }b\text{ 点的任意闭曲线}$$

（展开式形式上与实变函数相同）该定理实际上包含了几个方面

1. 能否将一个解析函数写成幂级数形式？✓

2. 写成的幂级数在 $|z-b|<R$ 内是否内闭一致收敛？ ✓

3. 写成的幂级数是否唯一？✓

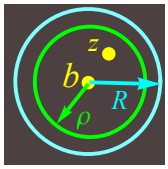
4. 幂级数的收敛半径如何？

这四个问题构成任意解析函数与幂级数之关系。下面就这4个方面加以证明。

1. 将解析函数表为幂级数

$f(z)$ 在区域 D：$|z-b|<R$ 解析，
$\forall z\in D$，在区域 D 内以 b 点为圆心做一个圆 C_ρ，
将 z 包围在圆内 。应用Cauchy公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$



注意 ξ 在 C_ρ 上，故：$|\xi-b|>|z-b| \implies \left|\frac{z-b}{\xi-b}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)-(z-b)}d\xi$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{1}{1-\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)}d\xi$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k\frac{f(\xi)}{(\xi-b)}d\xi$$

$\frac{|z-b|}{|\xi-b|}<1$，$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k$ 在 C_ρ 上一致收敛，在 C_ρ 上 $\frac{f(\xi)}{\xi-b}$ 有界，

故 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k\frac{f(\xi)}{\xi-b}$ 在 C_ρ 上一致收敛，故求积分与求和可交换次序

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}d\xi\right](z-b)^k$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$

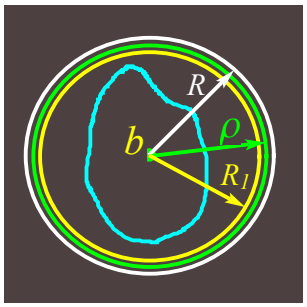
$$a_k=\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}d\xi\right]=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

回答了第一个问题：任意解析函数，在它的一个解析圆域内，
均可写成幂级数形式，该幂级数收敛于解析函数 。
那么，级数是否一致收敛？

2. 幂级数在 $|z-b|<R$ 绝对收敛且内闭一致收敛 。如何证明？寻找优级数。

幂级数的通项：$w_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{(z-b)^k f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}d\xi$

$$|w_k(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{|z-b|^k|f(\xi)|}{|\xi-b|^{k+1}}|d\xi|,\quad C_\rho:|z-b|=\rho$$



下证明级数绝对且内闭一致收敛 。
对任何 $|z-b|<R$ 之内的闭区域 （如图蓝色区 ）
均可做一圆 $|z-b|\le R_1$ （如图黄色区 ） 将其包围在内之内
而 $|z-b|\le R_1$ 又在 $|z-b|\le\rho$ （如图绿色区 ） 之内，
故蓝色闭区域内的任何点 ， 均满足：$|z-b|<R_1<\rho=|\xi-b|$

$$|w_k(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{(z-b)^k f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^k\frac{1}{\rho}\oint_{C_\rho}|f(\xi)|\,|d\xi|$$

$|w_k(z)| \le M\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^k$ 这里 M 为 $|f(z)|$ 在 C_ρ 上的最大值 。

$\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty}M\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^k$ 是原级数 $\sum_{k=0}^{\infty}w_k(z)$ 的优级数，存在优级数，故幂级数绝对且内闭一致收敛 。

故 $f(z)$ 可写成在 $|z-b|<R$ 区域内绝对收敛且内闭一致收敛的幂级数 。求积分与求和可交换次序 。

3. 幂级数的唯一性

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-b)^k$$

因为级数 内闭一致收敛， 由Weierstrass定理， 可逐项求导 。

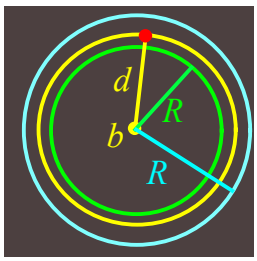
上两表达式逐项求导再令 $z=b$ 即得 $a_k=c_k$

4. 幂级数的收敛半径 R

R 为 $f(z)$ 离 b 最近的奇点到 b 之距离 d。

设 $d>R$：因 $f(z)$ 在 $|z-b|<d$ 解析，
$f(z)$ 的幂级数在 $|z-b|<d$ 区域内闭一致收敛，
绿、黄圆之间必存在一点 ，此点距 b 为 $R'>R$
在此点上 $f(z)$ 解析，幂级数此点上收敛于 $f(z)$
这与幂级数收敛半径等于 $R<R'$ 矛盾。

设 $d<R$：由于幂级数在收敛圆内解析 ，
故在圆周 $|z-b|=d<R$ 上，幂级数解析，
这与函数在圆周上有一奇点矛盾 。



综上：$d=R$

- 复变函数$f(z)$ 在 D 内解析，则它必有任意阶导数，故必可展开。

  对实变函数 $f(x)$，一阶导数存在不能保证二阶导数一定存在 ，故不能保证一定可以某区间展开为 Taylor 级数。

- 在无穷远点邻域的展开：做变换 $\zeta=1/z$，在 $\zeta=0$ 邻域展开。

展开方法 —— 基于唯一性

例题 在 z_0 的邻域展开称为Taylor级数 （即：展为以 z_0 为中心的幂级数 ）

1. $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z_0=0$ 邻域展开

解：熟知 $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$ 在 $|z|<1$ 绝对收敛且内闭一致收敛

两边同时求导 （可逐项求导 ） 得

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}k\,z^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,z^k$$

2. $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$ 在 $z_0=0$ 邻域展开 ， 已知多值函数 $f(0)=0$

解：$f'(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k+\sum_{k=0}^{\infty}z^k$

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^{k+1}}{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k+1}+c$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}\left[1-(-1)^k\right] + c$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + c, \quad \text{由 } f(0)=0 \implies c=0$$

3. $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 在 $z_0=1$ 邻域展开

解：我们对在 $z=0$ 邻域展开较为熟悉，故令 $t=z-1$，$g(t)=f(z)=\dfrac{t}{t+2}$

$$g(t)=\frac{1}{2}\frac{t}{1+\frac{t}{2}}=\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^k, \quad t=z-1 \text{ 代入}$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^{k+1},$$

收敛圆：$\left|\dfrac{t}{2}\right|<1 \implies |z-1|<2$。

离 $z=1$ 最近的奇点为 $z=-1$，距离 2，故收敛半径为 2。

4. $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$ 在 $z_0=0$ 邻域展开

解：e^z 的 n 阶导数 $(e^z)^{(n)}=e^z$，直接应用Taylor展开公式，

可得：$e^z=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{z^m}{m!}$，全平面绝对且一致收敛

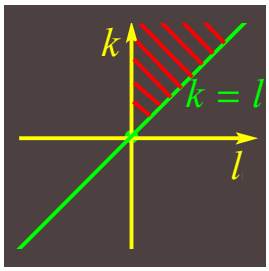
另：$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，在 $|z|<1$ 绝对且一致收敛

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \xrightarrow{\text{绝对收敛}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{m!}$$

应写成：$\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 形式

引入新亚元 (k,l)：$\begin{cases} m=l \\ m+n=k \end{cases}$，并把旧亚元表为新亚元

$$\begin{cases} m=l \\ n=k-l \end{cases} \implies \begin{cases} 0\le m=l<\infty \\ 0\le n=k-l<\infty \end{cases}$$ 如图阴影部分



$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{m!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\right)z^k, \quad a_k=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}$$

5. 试利用Taylor展开验证：$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

证明：$e^{z_1}=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{z_1^m}{m!}$，$|z_1|<\infty$ 绝对收敛

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_1^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_1^m}{m!}\frac{z_2^n}{n!}$$

引入新亚元 (k,l)：$\begin{cases} m=l \\ m+n=k \end{cases} \implies \begin{cases} m=l \\ n=k-l \end{cases}$（把旧亚元表为新亚元）

由 $\begin{cases} 0\le m<\infty \\ 0\le n<\infty \end{cases} \implies \begin{cases} 0\le m=l<\infty \\ 0\le n=k-l<\infty \end{cases}$ 依然如上题图中的阴影部分

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!\,(k-l)!}z_1^l z_2^{k-l}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z_1+z_2)^l=e^{z_1+z_2}$$

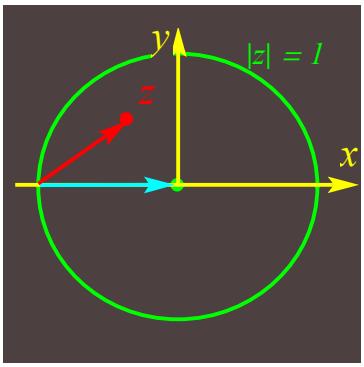
6. 试将函数 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$ 在 $z=0$ 邻域展开为 Taylor 级数，知 $f(0)=e^{2\alpha i\pi}$

解：实际上，$f(z)$ 是多值函数，故题中告知 $f(0)$ 的值。

据定义，复幂函数：$f(z)=e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(z+1)}$，因 $f(0)=e^{\alpha\,2\pi i}$

故在 $z=0$ 点，$\arg(1+z)=2\pi$

注：$z+1$ 视为从 -1 到 z 的自由矢量 （如图蓝色箭头 ）



利用Taylor展开公式 ， 且

$f(0)=e^{2\alpha i\pi}$ 注意：在 $z=0$ 时 $\arg(z+1)=2\pi$

$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}=\alpha\,e^{(\alpha-1)\,\mathrm{Ln}(z+1)}=\alpha\,e^{(\alpha-1)\,i\,2\pi}=\alpha\,e^{i\,2\alpha\pi}$

$f''(0)=\alpha(\alpha-1)\,(1+z)^{\alpha-2}=\alpha\,e^{(\alpha-2)\,\mathrm{Ln}(z+1)}=\alpha\,(\alpha-1)\,e^{i\,2\alpha\pi}$

$f^{(k)}(0)=\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-k+1)\,e^{i\,2\alpha\pi}$

直接应用 Taylor 展开公式：$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=e^{i\,2\alpha\pi}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}z^k\right]$

如果 α 为正整数，总有一自然数 k 使得 $(\alpha-k+1)=0$，展开式退化为有限项 （二项式定理 ）

多值性完全归结到 $e^{i\,2\alpha\pi}$，其余部分是单值的 。

收敛半径为 $R=1$，$z=-1$ 是支点，也被认为是奇点 。

例题 证明 最大模定理，即：若 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 上解析，则 $|f(z)|$ 只能在 $\overline{G}$ 的边界上取极大值 。

证明：反证法。设 $|f(z)|$ 在 区域的某个内点 z_0 取极大值 。

因为 z_0 是内点，必可找到一个邻域 C_ε：$|z-z_0|\le\varepsilon$，该邻域落在闭区域 $\overline{G}$ 内，从而该邻域解析 。

$f(z)$ 在 该邻域可 Taylor 展开：$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$，$f(z_0)=a_0$，$|f(z_0)|^2=|a_0|^2$

现在求 $|f(z)|^2$ 在以 z_0 为中心，ε 为半径的圆周 （$z-z_0=\varepsilon\,e^{i\theta}$） 上的平均值 $\langle|f(z)|^2\rangle$

$|f(z)|^2=f(z)\,f^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\sum_{l=0}^{\infty}a_l^*[(z-z_0)^*]^l=\sum_{k,l}^{\infty}a_k\,a_l^*\,(z-z_0)^k[(z-z_0)^*]^l$ （利用了绝对收敛性质 ）

$\langle|f(z)|^2\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k,l}^{\infty}a_k\,a_l^*\,\varepsilon^{k+l}\,e^{i\,(k-l)\,\theta}\,d\theta$，Taylor 级数一致收敛

$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k,l}^{\infty}a_k\,a_l^*\,\varepsilon^{k+l}\int_0^{2\pi}e^{i\,(k-l)\,\theta}\,d\theta=\sum_{k,l}^{\infty}a_k\,a_l^*\,\varepsilon^{k+l}\,\delta_{k,l}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,\varepsilon^{2\,k}\ge|f(z_0)|^2$

但 $|f(z_0)|^2$ 是极大值，大于号不可能成立 ，只能是等号成立 ，也就是说，对 $z\in C_\varepsilon$，$|f(z)|=|f(z_0)|$

此式表明在 z_0 邻域，$|f(z)|=|f(z_0)|$。在 C_ε 内 $|f(z)|$ 为常数，即 $f(z)=f(z_0)$ 为常数。

$g(z)=f(z)-f(z_0)$ 在 C_ε 内为零，而解析函数 $g(z)$ 的零点是孤立的 ，除非这个函数恒为零 。

故除非函数 $f(z)=f(z_0)$ 为常数，否则 $|f(z)|$ 不可能在解析区的内点取极大值 。

3.4 解析函数的Laurent展开

Taylor展开是解析函数在解析点邻域的展开，Laurent展开则是在奇点附近的展开，当然，要求函数在奇点附近存在解析区。

注意：展开仅仅在解析区进行，奇点必须挖去。

Laurent展开定理

展开定理：设 $f(z)$ 在以 b为圆心的一个环形区域 $R_2<|z-b|<R_1$ 内单值解析，则 $f(z)$ 可在环域内的任意点 z可展为以 $z=b$为中心的 Laurent 级数

$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k$，$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-b)^{k+1}}\ne\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$，$C_\rho$ 为绕内圆的环域内的任意闭曲线 。

类似于Taylor展开定理，Laurent展开定理实际上也包含以下几个方面

1. 环域内 $f(z)$ 能写成 Laurent 级数形式

2. Laurent级数在环域 $R_2 < |z-b| < R_1$ 里内闭一致收敛； ✓

3. Laurent级数是唯一的； ✓

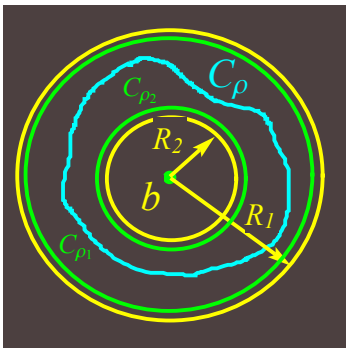
4. Laurent级数的收敛范围如何？（这里不是幂级数，不问收敛半径如何。）

下面就这几个方面加以证明。

1. 表为在环域 $R_2 < |z-b| < R_1$ 里内闭一致收敛的Laurent级数

$f(z)$ 在复连通环域 D：$R_2 < |z-b| < R_1$ 解析，

$\forall z \in D$, 应用复连通Cauchy公式：



$$2\pi i f(z) = \overbrace{\oint_{C_{\rho 1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}^{I_1} + \overbrace{\oint_{C_{\rho 2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}^{I_2},$$

$$I_1 = \oint_{C_{\rho 1}} \frac{f(\xi)}{\xi - b - (z-b)} d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{C_{\rho 1}} \frac{f(\xi)(z-b)^k}{(\xi-b)^{k+1}} d\xi \quad \text{积分路径变形}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)(z-b)^k}{(\xi-b)^{k+1}} d\xi$$

I_1 在 $|z-b| < R_1$ 区域里内闭一致收敛 (why？)

$$I_2 = \oint_{C_{\rho 2}} \frac{f(\xi)}{\xi - b - (z-b)} d\xi \quad \text{（注意积分路径走向：顺时针）}$$

$$= -\frac{1}{z-b} \oint_{C_{\rho 2}} \frac{f(\xi)}{1 - \left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)} d\xi \quad \text{在 } C_{\rho 1} \text{ 上积分，} |\xi - b| < |z-b|$$

$$= -\frac{1}{z-b} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{C_{\rho 2}} f(\xi) \left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^k d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{C_{\rho 2}} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{-k-1+1}} (z-b)^{-k-1} d\xi, \quad \text{令 } k' = -k-1, \text{且积分路径变形至 } C_\rho$$

$$= \sum_{k'=-1}^{-\infty} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k'+1}} (z-b)^{k'} d\xi$$

I_2 在 $|z-b| > R_2$ 区域里内闭一致收敛

联立 I_1 和 I_2 即得Laurent展开式，并且级数在环域里内闭一致收敛 。

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-b)^{k+1}}\right] (z-b)^k$$

2. 唯一性

在环域里内闭一致收敛 ， 级数可逐项求导 、求积

设 $f(z)$ 有另一个也是 内闭一致收敛 的Laurent展开式：

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{1.4}$$

与Taylor展开不同， b 点可能不解析， 不能用 $z = b$ 带入证明： $a_k = c_k$。

可从 Laurent展开 的系数表达式出发

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-b)^{n+1}} \quad \text{把 (1.4) 式 } f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-b)^k \text{ 带入并逐项求积}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oint_{C_\rho}\frac{c_k(z-b)^k}{(z-b)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\oint_{C_\rho}(z-b)^{k-n-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, 2\pi i\,\delta_{k,n} = c_n$$

- 当 $n>0$时，与Taylor展开不同，Laurent展开系数

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}d\xi \neq \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

因为$f(z)$在 $z=b$ 点可能不解析， $f^{(n)}(b)$不存在。

那么，如果$f(z)$在 $z=b$ 点解析，是否有 $a_n=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}$，No！

反例：

$f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ 在环域 $1<|z|<2$ 展为以 $z=0$ 为中心的Laurent级数

$$\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k+2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad \text{（一般形式）}$$

对任意 $k>0$， $a_k=0$，但 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^k\right]\neq a_k$

- 以 b 点为中心的Laurent级数含有负幂次项，则 b 点一定是奇点吗？

如果$f(z)$在 $|z-b|<R_1$区解析，

Laurent级数必退化为Taylor级数，负幂次项系数必为 0，

然而，Laurent级数含负幂次项，并不意味着 b 是奇点。

反例：

函数 $\frac{1}{1-z^2}$ 在 $z=0$ 点解析，在环域 $1<|z|<2$

展开为以 $z=0$ 为中心的Laurent级数仅含负幂次项 （参见上一点讨论的反例 ）。

为何含有负幂次，而函数却可能是解析的？

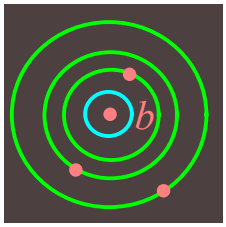
因为该例的展开仅在环域 $1<|z|<2$ 成立，在此环域的展开当然不能用于判断 $z=0$ 的解析性

要判断 $z=0$ 的解析性，必须在 $z=0$ 邻域展开：$\frac{1}{1-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}$ 都是正幂次，

要通过是否有负幂次项判断 b 点是否奇点，应在 b 点邻域展开。

- 在 b 点去心邻域 $0<|z-b|<\delta$ 的Laurent展开才能表征函数在 b 点的奇异性

通常，选取 b 点为中心，
$f(z)$ 在复平面上的奇点把复平面
分成以 b 点为中心的一个个环形解析区域，
在每个环形解析区域内函数都可以做Laurent展开，
但只有在 b 点的 （去心）
邻域 $0<|z-b|<\delta$ 的Laurent展开
可“用于”判断函数在 b 点的奇异或解析性质。



展开方法 —— 基于唯一性

例题 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 以 $z=1$ 为中心作Laurent展开。

解：以 $z=1$ 为中心，令 $t=z-1$，$f(z)=\frac{1}{t}\frac{1}{(t-1)}$，

$z=1, 2$ 两奇点把复平面分成两个环域 ，

分别在 $0<|z-1|<1$ 和 $1<|z-1|<\infty$ 两环域展开

$0<|z-1|<1$ 环域，$|t|<1$

$$f(z)=-\frac{1}{t}\frac{1}{1-t}=-\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}t^k$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{k-1}$$

$1<|z-1|<\infty$ 环域，$|t|>1$

$$f(z)=\frac{1}{t^2}\frac{1}{1-\frac{1}{t}}=\frac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty}t^{-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{-k-2}$$

例题 $I=e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-z^{-1}\right)\right]$ 作Laurent展开。

解：利用指数函数展开公式 ：

$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ 收敛区： $|z|<\infty$ （绝对且内闭一致收敛 ）

$e^{tz/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}z\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k z^k$ 收敛区 $|z|<\infty$ （全复平面 ）

$e^{-t/2z}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\frac{t}{2z}\right)^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\frac{t}{2}\right)^l z^{-l}$ 收敛区 $0<|z|<\infty$

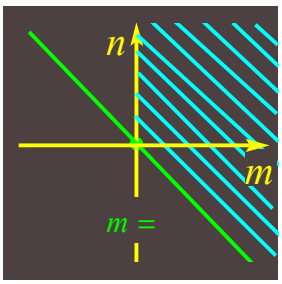
$I=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{k!\,l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+l}z^{k-l}$ 这里利用了绝对收敛性质 ： $\sum_{k=0}^{\infty}u_k\sum_{l=0}^{\infty}v_l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}u_k v_l$

但展开式通常希望写成 $\sum_n a_n z^n$ 形式，为此，令：$\begin{cases}k-l=n\\ l=m\end{cases}$

引入了新求和变量 m, n。接着，旧变量表为新变量的函数 ：$\begin{cases}k=n+m\\ l=m\end{cases}$

再由旧变量的变化范围得到新变量的变化范围 ：$\begin{cases}0\le l=m<\infty\\ 0\le k=m+n<\infty\end{cases}$

新变量 m, n 变化范围：$\begin{cases}0\le m<\infty\\ 0\le m+n<\infty\end{cases}$ 如上图阴影部分



故 I 需要分成两项：

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{k!\,l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+l}z^{k-l}=\sum_n\sum_m a_n z^n,\ \text{其中}\begin{cases}k=n+m\\ l=m\end{cases}$$
$$=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=-n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m}z^n}_{I_1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m}z^n}_{I_2}$$

$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(t)z^n$，其中 Bessel 函数 $J_n(x)$ 定义为 (1.5)

$$J_n(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m},\ n>0,\quad \text{Bessel函数的级数表示} \tag{1.6}$$

$$I_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=-n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m} z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n} z^{-n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(t)\, z^{-n},\ \text{其中 Bessel 函数 可定义为} \tag{1.7}$$

$$J_{-n}(x) \equiv \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n},\quad n>0$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}, \tag{1.8}$$

其中约定对 $k<0$：$\frac{1}{k!}=0$（当然这个约定与以后要遇到的 Γ 函数的性质是一致的 ）

(1.6) 和(1.8) 式可视为 $n>0$ 和 $n<0$ 时Bessel函数的定义 。

联立 (1.6) 和(1.8) 式，写成一个表达式： $J_n(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$， n 为整数

故：$I = I_1 + I_2 \implies$ $\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-z^{-1}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, z^n$

$I = \exp\left[\frac{t}{2}\left(z-z^{-1}\right)\right]$ 称为Bessel函数的 生成函数 。

生成函数：将其做 Laurent 展开，展开系数是一个特殊函数 ，则称之为该特殊函数的生成函数 。

遇到的另一个例子是 Hermite 多项式：$g(t,z) = e^{2tz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^n g(t,z)}{\partial z^n}\right|_{z=0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\,\frac{z^n}{n!}$

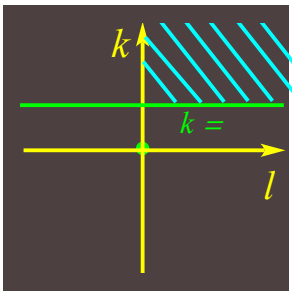
$J_{-n}(x)$ 和 $J_n(x)$ 之间有何关系 ？

由(1.7)：$I_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(t)\, z^{-n}$

令：$\begin{cases} n=k \\ m-n=l \end{cases}$ 引入新的求和变量 l, k 并把旧变量表为新变量 ： $\begin{cases} n=k \\ m=k+l \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \le n < \infty \\ n \le m < \infty \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \le n = k < \infty \\ k \le m = k+l < \infty \end{cases}$

新变量 l, k 变化范围如上图阴影部分 ，



故：$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-n)!\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n} z^{-n}$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{l!\,(k+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+k} z^{-k}$ 利用 (1.6)

$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(t)\, z^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(t)\, z^{-n}$

由展开的唯一性： $\implies J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$,

看起来似乎毫无关系的 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 其实是线性相关的 。后者在求解微分方程中很重要 。

例题 试证明

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta \quad \text{Bessel函数的积分表示}$$

证：由Bessel函数的生成函数知

$$e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n$$

由 Laurent 展开公式：$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{(x/2)(z-z^{-1})}}{z^{n+1}}dz$，

取 C 为圆心于原点的单位圆 ，$z = e^{i\theta}$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix\sin\theta}}{e^{in\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta$$

利用函数的周期性：$\int_0^{2\pi}\sin(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta = 0$（被积函数是奇函数 ）

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{(x/2)(z-z^{-1})}}{z^{-n+1}}dz,$$

再令：$z = -e^{i\theta}$，$dz = -i\,e^{i\theta}\,d\theta$

$$J_{-n}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ix\sin\theta}}{e^{-in\theta}}d\theta = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}d\theta$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta + \frac{(-1)^n i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

本例说明：特殊函数的性质可以从许多不同的表示 （级数表示、积分表示 ） 出发予以证明 。

例题 $f(z)$ 在环域 $\rho < |z| < 1/\rho,\ (0<\rho<1)$内解析，且 $f(1/z^*) = f^*(z)$。在环域 $f(z)$ 展开为以$z=0$为中心的Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$，试证：$a_{-n} = a_n^*$，并且在 $|z|=1$，$f(z)$ 为实数 。

证：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = f(z) = [f(1/z^*)]^* = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z^*}\right)^n\right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}^* z^n$

由展开的唯一性：$a_n = a_{-n}^* \implies a_{-n} = a_n^* \implies a_0$ 为实数

$|z|=1$ 时，$\frac{1}{z} = z^*$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n z^n + a_{-n} z^{-n})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n z^n + a_{-n}(z^*)^n] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n z^n + a_n^*(z^*)^n] = \text{实数}$$

3.5 解析函数的零点和孤立奇点

由上一节知，奇点附近的展开应该是在奇点附近找一解析环域，在该环域做Laurent展开。

这就要求函数在奇点附近存在解析区（解析环域）。数学上如何描述所谓奇点附近存在解析区？

解析函数的零点及其孤立性

为何研究零点？因为分母的零点通常就是函数的奇点。

定义：$f(z)$在 b点解析且 $f(b)=0$，则称 b为解析函数 $f(z)$的零点。

- 零点的阶数：Taylor 展开的最低幂次。

据解析的定义，在 b 点解析，必 $\exists\delta$, 使得 在 $0 \le |z-b| < \delta$ 解析，故可做Taylor展开：$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$,

$f(b) = 0$, 故：$a_0 = 0$。$a_1 = 0$?

若 $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0$, 则称 b 为 m 阶零点。

若 b 为 m 阶零点，由：$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 和 $a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$,

得：$f^{(k)}(b) = 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$，$f^{(m)}(b) \neq 0$。

■ 零点的孤立性

设 b 为 $f(z)$ 的零点，若 $f(z)$ 在 $z = b$ 点解析且不恒为零，

则必存在某个邻域 $|z-b| < \delta$，在该邻域内除 b 点外，$f(z) \neq 0$。

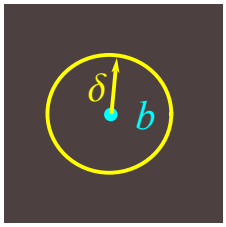
证明：因为 $f(z)$ 在 $z = b$ 点解析，必可做 Taylor 展开，设 b 为 m 阶零点，则

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-b)^k$$
$$= (z-b)^m [a_m + a_{m+1}(z-b) + \ldots] = (z-b)^m \varphi(z),$$
$$\varphi(b) = a_m \neq 0$$

由于 $f(z)$ 解析，幂级数必一致收敛，故 $\varphi(z)$ 必连续，

即 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \rho$, 使得当 $|z-b| < \rho$ 时，$|\varphi(z) - a_m| < \varepsilon$.

现取 $\varepsilon = |a_m|/2$，必存在 δ，使得当 $|z-b| < \delta$ 时，



$|\varphi(z) - a_m| < \varepsilon = |a_m|/2 \implies |a_m| - |\varphi(z)| < |a_m|/2 \implies |\varphi(z)| > |a_m|/2 > 0$

即 $\exists$ 一个 δ 邻域，在该邻域内，$|\varphi(z)| > 0$, 而在 去心邻域 $0 < |z-b| < \delta$, $(z-b)^m \neq 0$,

故在 b 点的去心邻域 $0 < |z-b| < \delta$，$f(z) = (z-b)^m \varphi(z) \neq 0$

$\implies$ 解析函数的零点是孤立的。除非该函数恒为零（任意阶导数均为 0）。

孤立奇点

奇点：不解析的点，没有定义（如：分母为零）的点，多值函数的支点，都是函数的奇点。

定义：设 b点是函数$f(z)$的奇点，若存在一个 $\delta > 0$，使得函数在去心邻域 $0 < |z-b| < \delta$内解析，则称 b点是函数$f(z)$的孤立奇点。

为何要特别讨论？因为对孤立奇点，即可以在 b 点的去心邻域（环域解析区 $0 < |z-b| < \delta$）内做 Laurent 展开。

$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ 在 $z = 1$ 点是孤立奇点，$\frac{\sin z}{z}$ 在 $z = 0$ 点是孤立奇点

非孤立奇点：找不到一个邻域，使得在该邻域内，除了b点外处处解析。

$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 在 $z = 0$ 点不是孤立奇点，因为 $z = \frac{1}{n\pi}$ 都是 $f(z)$ 的奇点，

也即，无论多么小的 δ，都不能保证在 $0 < |z| < \delta$ 内除了 $z = 0$ 外都解析。

实际上，在 $0 < |z| < \delta$ 之内还有奇点 $z = \frac{1}{n\pi}$ with $n > \frac{1}{\delta}$。

$f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ 在 $z = \infty$也是非孤立奇点，即不能找到一个邻域 $|z| > M$,

使得在该邻域内不再有其它奇点。

例如，当 m 走够大时，奇点 $z_m = i(2m+1)\pi$ 落入 $z = \infty$的邻域 $|z_m| > M$。

当然，也可以经过变量代换 $t = \frac{1}{z}$，讨论函数在 $t = 0$ 邻域的奇点孤立性。

$f(z)=\frac{1}{1+e^{1/t}}$，取 $t=\frac{-i}{(2k+1)\pi}$，奇点可以离 $t=0$ 任意近。

孤立奇点：离该奇点最近的另一奇点到该奇点的距离大于某个非零值 。

对孤立奇点 b，因为存在以内径为 0 的环域解析区，故一定可以在 环域解析区 $0<|z-b|<\delta$ 进行 Laurent 展开。

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k,\qquad 0<|z-b|<\delta$$ （绝对收敛且 内闭一致收敛 ）

孤立奇点的分类

定义：对孤立奇点 b，在其解析的去心邻域作 Laurent 展开

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k,\qquad 0<|z-b|<\delta$$

i. 若展开式中没有负幂次项，则奇点 b 称为可去奇点

ii. 若展开式中只有有限个负幂次项，则称为极点（pole），最负幂次到 $-m$ 次，称 m 阶极点

iii. 无限个负幂次项，则称本性奇点

为何要分类，因为绕 b 积分的计算与奇点的种类有关。如何判别是哪一类奇点？

- 可去奇点的充要条件：$|f(z)|$ 在 b 点的邻域有界。
  - 必要性：可去奇点，Laurent 展开式没有负幂次项

    $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$，因为 Laurent 展开是内闭一致收敛 ，

    求极限与求和交换次序 ： $\lim_{z\to b}f(z)=a_0$

    接着，利用极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta,$ 使得 $|z-b|<\delta$ 时，

    $|f(z)-a_0|<\varepsilon\implies|f(z)|-|a_0|<\varepsilon\implies|f(z)|<|a_0|+\varepsilon$ 有界。
  - 充分性：$|f(z)|$ 在 b 点的某个 δ 邻域有界，由 Laurent 展开

    $$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k,\qquad a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-b)^{k+1}}$$

    取积分回路 C_ε 为落在 b 点的 δ 邻域内的小圆，$\xi-b=\varepsilon e^{i\theta},\ \varepsilon\le\delta$

    则在积分回路上 $|f(\xi)|$ 有界：$|f(\xi)|<M,$

    $$\begin{aligned}|a_k|&=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-b)^{k+1}}\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\varepsilon}\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|\xi-b|^{k+1}}\\&\le\frac{M}{\varepsilon^k}\end{aligned}$$ （积分圆 C_ε 的半径可任意小 ）

    对 $k<0,\ |a_k|\le M\varepsilon^{-k}$ 可小于任意小数，即：$a_k=0\implies$ 无负幂次项 。
  - 对可去奇点，$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,\quad 0<|z-b|<\delta$

    $\lim_{z\to b}f(z)=a_0$，若规定 $f(z)\big|_{z=b}=a_0=\lim_{z\to b}f(z),$

    则 $f(z)$ 可视为在 b 点解析 。

    例如：$f(z)=\frac{\sin z}{\pi-z},\quad\lim_{z\to\pi}f(z)=1,$

定义 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{\pi-z} & z\neq\pi\\ 1 & z=\pi\end{cases}$，$f(z)$ 在 $z=\pi$ 解析。

故曰 可去奇点。

- 邻域有界必有极限：若函数在点 b 的解析去心邻域 $0<|z-b|<\delta$ 内有界，则极限 $\lim\limits_{z\to b}f(z)$ 存在。

■ 极点的充要条件：$\lim\limits_{z\to b}f(z)=\infty$ 严格意义上无穷大归为极限不存在，

因此在这里等式 $\lim\limits_{z\to b}f(z)=\infty$ 的意义是：

$\forall M>0$，$\exists\ \delta$，使得当 $|z-b|<\delta$ 时，$|f(z)|>M$

语言描述：无论 z 以何种方式趋于 b，$f(z)$ 都趋于无穷，$|f(z)|$ 都趋于无穷大。

- 必要性：m 阶极点，Laurent展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}}+\ldots+a_0+a_1(z-b)+\ldots$$
$$=\frac{1}{(z-b)^m}\left[a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+\ldots\right],\quad a_{-m}\neq 0$$

显然，无论 z 以何种方式趋于 b，

只要离 b 足够近，$|f(z)|$ 必可大于任意正数 。

- 充分性：应该证明：若 $z\to b$ 时，$f(z)\to\infty$，则 b 为极点。

令：$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，显然：$\lim\limits_{z\to b}g(z)=0$ 故在 z 的领域，$g(z)$ 有界，

故一定可找到一个 δ 邻域，使得 $|z-b|<\delta$ 时，$|g(z)|<M$

因此，$z=b$ 是 $g(z)$ 的可去奇点 （见可去奇点的充要条件 ）。

$g(z)$ 的Laurent展开式没有负幂次项 ，又 $\lim\limits_{z\to b}g(z)=0\implies a_0=0,$

$$g(z)=a_m(z-b)^m+a_{m+1}(z-b)^{m+1}+\ldots,\quad m\geq 1,\ a_m\neq 0$$
$$=(z-b)^m[a_m+a_{m+1}(z-b)+\ldots]=(z-b)^m\,\varphi(z)$$

因级数内闭一致收敛 ，$\varphi(z)$ 在 b 邻域解析并且 $\varphi(z)\big|_{z=b}=a_m\neq 0$

故必存在一个邻域 ，在该领域 $\varphi(z)\neq 0$，故可求其倒数：$\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$,

$\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 b 某邻域解析并且 $\psi(z)\Big|_{z=b}\neq 0$

$\psi(z)=c_0+c_1(z-b)+\ldots,$ 其中 $c_0\neq 0,$

因此：$f(z)=\dfrac{1}{g(z)}=\dfrac{1}{(z-b)^m\,\varphi(z)}=\dfrac{\psi(z)}{(z-b)^m}=\dfrac{1}{(z-b)^m}[c_0+c_1(z-b)+\ldots]$

$f(z)$ 的展开式有有限个负幂次 $\implies$ m 阶极点

- 推论（证明类似上述证明）

▲ 如果 b 为 $g(z)$ 的 m 阶零点，则 b 必为 $\dfrac{1}{g(z)}$ 的 m 阶极点，反之，如果 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则它必为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点；

▲ 若已知 b 为 $f(z)$ 的极点，为确定极点的阶数 m，可以求 $(z-b)^n f(z)$ 的极限

$$\lim_{z\to b}[(z-b)^n f(z)]=\begin{cases}\infty & m>n\\ c\neq 0 & m=n,\\ 0 & m<n\end{cases}$$ 其中 m 为极点的阶数 。

▲ 设 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，如果 (a) $\lim_{z\to b}\varphi(z)\neq 0$ 且 (b) $z=b$ 是 $\psi(z)$ 的 m 阶零点，则 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点。

▲ 设 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，如果 $z=b$ 是 (a) $\varphi(z)$ 的 m_1 阶零点，是 $\psi(z)$ 的 m_2 阶零点，则 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m_2-m_1 阶极点。

例题：

$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点：$z=n\pi$ 是分母的一阶零点，故 $z=n\pi$ 是 $f(z)$ 的一阶极点（也称单极点）；

$f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$ 的奇点：$z=n\pi\ (n\neq 0)$ 是分母的二阶零点，是 $f(z)$ 的二阶极点，$z=0$ 是单极点；

$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z-\sin z}{z\sin z}$：$z=0$ 分子分母皆二阶零点，故 $z=0$ 是可去奇点；$z=n\pi\,(n\neq 0)$ 为单极点。

■ 本性奇点：$f(z)$ 在 b 点的任何邻域都无界；且 z 以不同方式趋于 b，$f(z)$ 趋于不同值。

$e^{1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^k$，含无穷多个负幂次项，$z=0$ 是本性奇点

$$\lim_{z\to 0}e^{1/z}=\begin{cases}\infty, & z\text{ 沿正实轴趋于 }0\\ 0, & z\text{ 沿正实轴趋于 }0\text{，沿不同方式趋于 }b,\ f(z)\text{ 趋于不同值。}\\ \text{有限但不确定，} & z\text{ 沿虚轴 }0\end{cases}$$

- 定理：若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 在 b 的任意一个邻域内，都可以无限地靠近任意一个复数值。

该定理说明：在本性奇点邻域，$f(z)$ 的函数值完全不确定。

b 是本性奇点，故一定可找到一条路径，

沿该路径 $z\to b$ 时，$f(z)\to\infty$，否则，$f(z)$ 有界，b 不是本性奇点。

$\forall$ 复数 A，令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$，只需证明存在一条路径，使得当 z 沿该路径 趋于 b 时，$g(z)\to\infty$，即 $f(z)\to A$

反证：若不存在这样一条路径，则 z 沿任意路径 趋于 b 时，$g(z)$ 均有界，

也即一定存在一个去芯邻域，$g(z)$ 有界，

在此去芯邻域，$f(z)$ 解析，$g(z)$ 解析有界，可设：$\lim_{z\to b}g(z)=G$（邻域有界必有极限）

若 $G\neq 0$，$\lim_{z\to b}f(z)=A+\dfrac{1}{G}$，即 $f(z)$ 在 b 的某个邻域有界，b 必为可去奇点，与 b 是本性奇点矛盾；

若 $G=0$，则 $\lim_{z\to b}f(z)=\infty$，b 必为极点，b 是本性奇点矛盾。

故必存在一条路径使 $g(z)\to\infty$，即存在一条路径使 $f(z)\to A$ $\Longrightarrow$ $f(z)$ 可无限地靠近任一个复数值

■ 无穷远点的孤立性判断：设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的奇点，以原点为圆心，R 为半径做圆 C_R，如果可以找到一个半径 R，使得在圆 C_R 之外，除了无穷远点之外，$f(z)$ 没有其它奇点，则称无穷远点是 $f(z)$ 的孤立奇点。简而言之，大圆 C_R 之外不再有其它奇点。

- 在无穷远邻域的展开就是在环域 $R<|z|<\infty$ 的Laurent展开。如果在有限区域没有奇点，则退化为 $|z|<\infty$ 的Taylor展开。
- 若函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 的Laurent展开没有正幂次项，则称 $z=\infty$ 为可去奇点；对应极限有限
- 若函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 的Laurent展开的最高正幂次项为 $z^m\ (m>0)$，则称 $z=\infty$ 为 m 阶极点；对应极限为无穷
- 若展开式由无限个正幂次项，则成为本性奇点；极限无定值（与 z 趋于无穷的路径有关）
- 研究无穷远点邻域的性质，也可做变换 $\zeta=1/z$，研究 $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 邻域的性质
- 判断奇点类别时，一定要记得判断 $z=\infty$ 点的类型：是否孤立？可去、极点、或本性

例题：判断下列函数各奇点的类型

$f(z)=\frac{z}{z^4+4}$：$z=\infty$ 为可去奇点，因为 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ 有界，当然 $z=4^{1/4}\,e^{i(2k+1)\pi/4}$ $(k=0,\,1,\,2,\,3)$ 为单极点。

$f(z)=e^z$：$z=\infty$ 为本性奇点，因为 $\lim_{z\to\infty} e^z$ 的极限值与 $z\to\infty$ 的路径有关

$f(z)=\frac{1}{e^{1/z}-1}$：$z=\infty$ 为单极点，因为 $\zeta=1/z$，$f(z)=\frac{1}{e^{\zeta}-1}$，分母在 $\zeta=0$ 是一阶零点

$z=0$ 为非孤立奇点，因为 $z=\frac{i}{2n\pi}$ 都是奇点，也即 $z=0$ 的任何邻域内都存在其它奇点 。

$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$：$z=\infty$ 为非孤立奇点，

因为 $z=2in\pi$ 都是奇点，找不到一个半径，使得 C_R 之外不再有其它奇点 。

$f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin a}$：
- $\cos a\neq 0$ 时，$z=k\pi+(-1)^k a$ 是单极点
- $\cos a=0$ 时，$z=k\pi+(-1)^k a$ 是二阶极点
- $z=\infty$ 为非孤立奇点，因为 $k\pi+(-1)^k a$ 都是奇点，故可取足够大的 k，使奇点落在任意给定的大圆 C_R 之外

$f(z)=\frac{z^5}{(z-1)^2}$ 的奇点：
- $z=1$ 为二阶极点
- $z=\infty$ 为三阶极点

$f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$ 的奇点：
- $z=0$ 为可去奇点 （分子分母皆为三阶零点 ），$z=\infty$ 必须判断
- $z=\infty$ 为本性奇点，因为沿不同路径 （例如：沿实轴和虚轴 ） 趋于无穷的极限值不同

在使用 *Mathematica* 求极限时须小心

```
Clear["Global`*"]
f[z_] := (Sin[z] - z)/z^3;
Limit[f[z], {z → ∞, z → -∞}]
(* 此处 Mathematica 分别把z 沿正负实轴趋于无穷)
Limit[f[z], {z → i ∞, z → -i ∞}] (* 此处 Mathematica 分别把z 沿正负虚轴趋于无穷)
Limit[f[x + i y], {x → ∞, y → ∞}] (* 分别沿平行于实轴和平行于虚轴的直线趋于*无穷
Limit[f[z], z → ComplexInfinity] (* 沿任意路径趋于无穷)
```

```
{0, 0}
```

```
{-∞, -∞}
```

```
{0, ComplexInfinity}
```

```
Limit[(-z + Sin[z])/z^3, z → ComplexInfinity]
```

```
Limit[f[z], z → -i ∞];
t1 = TrigToExp[f[z]];
t2 = t1 /. z → i y
Limit[t2, y → -∞]
```

$$\frac{e^{-y}}{2\,y^3} - \frac{e^{y}}{2\,y^3} + \frac{1}{y^2}$$

$$-\infty$$

例题：已知　z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，问 z_0 是 $g(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的何种奇点？$g(z)$ 在 z_0 的去芯邻域展开成以 z_0 为中心的 Laurent 级数，$a_{-1}=?$

解：若 z_0 有限，在去芯邻域 $0<|z-z_0|<\delta$，

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dfrac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots \\ f'(z)=\dfrac{-m\,a_{-m}}{(z-z_0)^{m+1}}+\dfrac{-(m-1)\,a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m}}+\ldots \end{cases}, \quad a_{-m}\neq 0$$

注：展开在解析区 $0<|z-z_0|<\delta$ 进行，$f(z)$ 在此区域解析，可导。

$$g(z)=\left(\frac{-m\,a_{-m}}{z-z_0}-(m-1)\,a_{-m+1}-(m-2)\,a_{-m+2}(z-z_0)+\ldots\right)\Big/(a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\ldots)=\frac{-m}{z-z_0}\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z)=\left(1+\dfrac{(m-1)}{m}\dfrac{a_{-m+1}(z-z_0)}{a_{-m}}+\dfrac{(m-2)}{m}\dfrac{a_{-m+2}}{a_{-m}}(z-z_0)^2+\ldots\right)\Big/\left(1+\dfrac{a_{-m+1}}{a_{-m}}(z-z_0)+\ldots\right)$

$\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=1$，$z_0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点，$\varphi(z)=1+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots$

$g(z)=\dfrac{-m}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots \implies z_0$ 是 $g(z)$ 的单极点且 Laurent展开式中 $a_{-1}=-m$

若 $z_0=\infty$，在 $R<|z|<\infty$，

$$\begin{cases} f(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots \\ f'(z)=m\,a_m z^{m-1}+(m-1)\,a_{m-1}z^{m-2}+\ldots \end{cases}, \quad a_m\neq 0$$

$$g(z)=\frac{m}{z}\phi(z),\quad \phi(z)=\frac{1+\dfrac{(m-1)}{m}\dfrac{a_{m-1}}{a_m}\dfrac{1}{z}+\ldots}{1+\dfrac{a_{m-1}}{a_m}\dfrac{1}{z}+\ldots}=1+b_{-1}\frac{1}{z}+b_{-2}\frac{1}{z^2}+\ldots$$

$g(z)=\dfrac{m}{z}+c_2\dfrac{1}{z^2}+c_3\dfrac{1}{z^3}+\ldots, \implies z_0$ 是 $g(z)$ 的可去奇点且 Laurent展开式中 $a_{-1}=m$