下篇 数学物理方程

—物理问题中的二阶线性偏微分方程及其解法与特殊函数

Chapter 9 数学物理方程的定解问题

Abstracts: 1. 根据物理问题导出多变量数理方程—偏微分方程；
2. 给定数理方程的附加条件：初始条件、边界条件、物理条件(自然条件，连接条件)和周期条件等，从而与数理方程一起构成定解问题；
3. 数理方程的线性性导致解的叠加原理；
4. 非齐次方程的齐次化方案。

一、 数理方程的来源（状态描述、变化规律）

1. 翻译

I. Classical Newton Mechanics [质点力学 $m\ddot{\vec r}=\vec F(\vec r,t)$](Newton)，连续体力学

$$
\begin{cases}
\underset{(\text{弹性定律})}{\text{弹性体力学}}\begin{cases}\text{弦}\\ \text{杆}\\ \text{膜}\end{cases}\text{振动：}\dfrac{\partial^2 u(\vec r,t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(\vec r,t)=0\quad(3+1\text{D波动方程})\text{；}\\
\underset{(\text{基本方程})}{\text{流体力学}}\text{：质量（流）守恒律：}\dfrac{\partial\rho(\vec r,t)}{\partial t}+\nabla\cdot[\rho(\vec r,t)\vec v(\vec r,t)]=0;\\
\qquad\text{热力学物态方程：}\dfrac{\partial \vec v(\vec r,t)}{\partial t}+[\vec v(\vec r,t)\cdot\nabla]\vec v(\vec r,t)=\dfrac{\dot{\vec p}(\vec r,t)}{\rho(\vec r,t)}=\vec f(\vec r,t)(\text{Euler eq.}).
\end{cases}
$$

II. Electrodynamic Mechanics (Maxwell equations)

$$
\begin{cases}
\oiint \vec D\cdot \mathrm{d}\vec\sigma=\iiint\rho\,\mathrm{d}\tau\Rightarrow\nabla\cdot\vec D=\rho;\quad \oint\vec E\cdot\mathrm{d}\vec l=\iint\dot{\vec B}\cdot\mathrm{d}\vec s\Rightarrow\nabla\times\vec E=\dot{\vec B};\\
\oiint \vec B\cdot\mathrm{d}\vec\sigma=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec B=0;\quad \oint\vec H\cdot\mathrm{d}\vec l=\iint(\vec j+\dot{\vec D})\cdot\mathrm{d}\vec s\Rightarrow\nabla\times\vec H=\vec j+\dot{\vec D}.\\
\vec E=-\nabla u,\ \vec B=\nabla\times\vec A,\ (u,\vec A)\text{满足波动方程。}\\
\text{Lorenz力公式}\Rightarrow\text{力学方程；Maxwell eqs.+电导定律}\Rightarrow\text{电报方程。}
\end{cases}
$$

III. Statistic Mechanics (Boltzmann-Gibbs statistics):

$$
\begin{cases}
\text{热传导方程：}\dfrac{\partial T}{\partial t}-k\nabla^2 T=0;\\
\text{扩　散方程：}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}-D\nabla^2\rho=0.
\end{cases}
\quad \text{特别：稳态（}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\text{）}:\nabla^2\rho=0\quad(\text{Laplace equation}).
$$

IV. Quantum Mechanics: Schrödinger’s equation (Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Fermi, Einstein)

$$
i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u+Vu.
$$

2. 分类

物理过程	方　程	数学分类
振动与波	波动方程 $\nabla^2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$	双曲线
输运方程	$\begin{cases}\text{能量：热传导}\\ \text{质量：扩　散}\end{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-k\nabla^2 u=0$	抛物线
稳态方程	Laplace equation $\nabla^2 u=0$	椭圆型

二、　数理方程的导出

推导泛定方程的原则性步骤：

(1)　定变量：找出能够表征物理过程的物理量作为未知数（特征量,科学思维上设为已知），并确定影响未知函数的自变量。

（2）立假设：抓(取)主要因素，舍（弃）次要因素，将问题“理想化”
---“无理取闹”（物理乐趣；大胆假设，小心求证）。

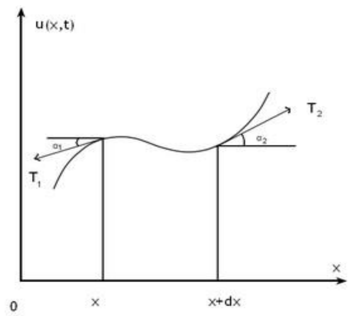
（3）取局部：从研究物体内部中找出微小的局部（微元），相对于此局部的一切高阶无穷小量均可忽略---线性化。

（4）找作用：根据已知物理规律或定律，找出局部和邻近部分的作用关系。

（5）列方程：根据物理规律在局部上的表现，联系局部作用列出微分方程。

1．弦的横振动方程（1+1D）

[一根张紧(interaction between particles)的柔软弦的微小横振动问题]



(1)定变量：取弦的平衡位置为 x 轴。表征横振动的物理量为各点的横向位移 $u(x,t)$，故速度为 u_t 和加速度为 u_{tt}.

(2)立假设：1）弦的横振动是微小的，$|\alpha|<<1$，

因此，$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\alpha$，$\cos\alpha\approx 1$，又 $\because\frac{\partial u}{\partial x}=\tan\alpha\approx\alpha$，$\therefore\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|<<1$.

2) 弦是柔软的，即在它的横截面内不产生应力，则在拉紧的情况下弦上相互间的拉力即张力 $T(x,t)$ 始终是沿弦的切向(等

价于弦上相互间有小的弹簧相连—最简单的相互作用！)。

3) 所有外力都垂直于 x 轴，外力线密度为 $F(x,t)$.

4) 设（细长）弦的线密度为 $\rho(x,t)$，重力不计。

(3)取局部：在点 x 处取弦段 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ 是如此之小,以至可以把它看成质点(微元)。 质量： $\rho(x,t)\mathrm{d}x$.

弧长：$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x$（即这一小段的长度在振动过程中可以认为是不变的，因此它的密度 $\rho(x,t)$ 不随时间变化，另外根据 Hooke 定律 $\delta F=-k\delta x$ 可知，张力 $T(x,t)$ 也不随时间变化，我们把它们分别记为 $\rho(x)$ 和 $T(x)$.

(4)找作用：找出弦段 $\mathrm{d}x$ 所受的力。外力： $F(x,t)\mathrm{d}x$，垂直于 x 轴方向；

张力变化：$\left(T\cos\alpha\right)|_{x+\mathrm{d}x}-\left(T\cos\alpha\right)|_x=T(x+\mathrm{d}x)-T(x)$, x 方向紧绷，

$\left(T\sin\alpha\right)|_{x+\mathrm{d}x}-\left(T\sin\alpha\right)|_x=\left(Tu_x\right)|_{x+\mathrm{d}x}-\left(Tu_x\right)|_x=\left(Tu_x\right)_x\mathrm{d}x$,

垂直于 x 轴方向。

(5)列方程：根据牛顿第二定律

$T(x+\mathrm{d}x)-T(x)=0$，因 x 方向无位移，故 $T(x+\mathrm{d}x)=T(x)=T$.

$\rho(x)\mathrm{d}xu_{tt}=F(x,t)\mathrm{d}x+\left(Tu_x\right)_x\mathrm{d}x=F(x,t)\mathrm{d}x+Tu_{xx}\mathrm{d}x$

即 $u_{tt}-\frac{T}{\rho}u_{xx}=f(x,t)$，其中 $f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}$ 是单位质量所受外力。

如果弦是均匀的，即 ρ 为常数，则可写 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 为弦振动的传播速度，则

$$\boxed{u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t).}$$

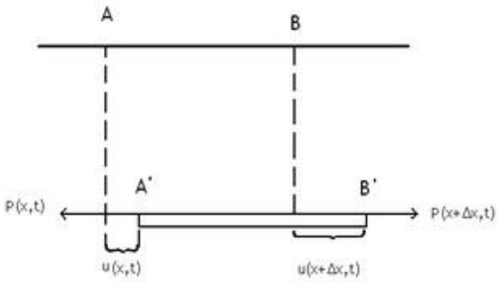
对于自由运动，即无源 $f\equiv 0$，这个方程简化为齐次方程：$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$.

在有界实空间的适当边界条件下，通过分离变量和求解本**本征值问题，**得到与 a 啊相关的本征值，再与实验频率相比较，即可求得材料的 a.

怎么运动：源（非齐次）驱动或边界驱动和初始驱动。

2．杆的纵振动方程（1+1D）

[一根弹性(linear interaction between particles)均匀细杆的微小纵振动问题]



(1)定变量：取细长杆的放置为 x 轴。表征纵振动的物理量为各点 x 离开平衡位置的纵向位移 $u(x,t)$.

(2)立假设：1) 振动方向与杆的方向一致。

2) 均匀细杆，同一横界面上各点的质量密度 ρ，横截面面积 S 与杨氏模量 Y（应力与应变之比值）都是常量（常数）。

3) 杆有弹性，服从 Hooke 定律：应力 P 与相对伸长成正比，即 $P(x,t)=Y\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$，其中 $P(x,t)$:单位横截面上的内力（相互作用），方向沿 x 轴正方向，但是力 $\vec{F}=P(\vec{r},t)\Delta\vec{S}$ 是沿该截面法向（外向）的。x^- 施给 x 截面的力（拉力）的方向：$-\hat{x}$；同理 $P(x+\Delta x,t)\Delta S=Y\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x}\,\Delta S$ 为 x 中 Δx^+ 施给 $x+\Delta x$ 截面方向的力(拉力),其方向: $\hat{x}$（这种取法类似于紧绷弦的受力分析）。

4) 外力与杆的方向一致，各点时刻 t 单位横截面上的外力为 $F(x,t)$（例如每个弹簧都用绳子牵引着），重力不计。

(3)取局部:在点 x 处取杆微段 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ 是如此之小,以至可以把它看成质点。

质量： $\rho(x,t)S\mathrm{d}x$.

绝对伸长： $\Delta u=u\big|_{x+\Delta x}-u\big|_{x}$,

相对伸长： $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u_x$ （应力）。

(4)找作用：找出杆的这个微段所受的力。外力： $F(x,t)S\mathrm{d}x$;

应力变化： $\left(Yu_xS\right)\big|_{x+\mathrm{d}x}-\left(Yu_xS\right)\big|_{x}=\left(Yu_xS\right)_x\mathrm{d}x=Yu_{xx}S\mathrm{d}x$.

(5)列方程：根据牛顿第二定律

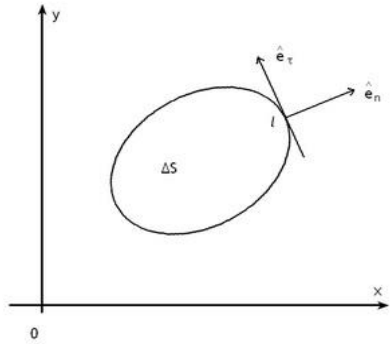
$$\rho S\mathrm{d}x u_{tt} = F(x,t)S\mathrm{d}x + Yu_{xx}S\mathrm{d}x$$

即，$u_{tt} - \dfrac{Y}{\rho}u_{xx} = f(x,t)$，其中 $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$.

令 $a = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$ 为杆振动的传播速度，则 $\boxed{u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t).}$

自由振动：齐次方程；受迫振动：非齐次方程。

注意：杆中应力与相对位移成正比，因而做纵振动；虽然弦中位移 Δu 在 x 轴方向为零，但是粒子之间的相互作用力即张力 T 使得弦紧绷着，因而做横振动。



3．薄膜的横振动方程（不要求）

（张紧的柔软膜的微小振动问题）

定变量：各点的横向位移 $u(x,y,t)$，从而速度为 u_t，加速度为 u_{tt}.

立假设：1）膜是柔软的，即在它的横界面内不产生应力，膜上任一点的表面张力 $T(x,y,t)$ 必在过这一点的切平面内。

2）膜振动是微小的，张力的仰角 $|\alpha| << 1$，因此，

$$T_u = T\sin\alpha \approx T\tan\alpha = T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

3）所有外力都垂直于 $0-xy$ 面，外力面密度为 $F(x,y,t)$.

4）膜是均匀的，即，密度 ρ 为常数。

取局部：在点 (x,y) 处取一小块模 $\mathrm{d}S$，质量：$\rho(x,t)\mathrm{d}S$.

找作用：找出膜所受的力。外力：$F(x,y,t)\mathrm{d}S$，垂直于 $0-xy$ 面；

张力变化：$\oint_l T_u \mathrm{d}l = T\oint_l \dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}l$，

$$\oint_l \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}l = \oint_l\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right]\mathrm{d}l = \oint_l\left[\frac{\partial u}{\partial x}\sin(\tau,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\tau,y)\right]\mathrm{d}l$$

$$=\oint_l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\right)=\oint_l\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)=\oiint_S\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\mathrm{d}S$$

列方程：根据牛顿第二定律

$\rho\mathrm{d}Su_{tt}=F(x,t)\mathrm{d}S+T\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\mathrm{d}S$，即

$u_{tt}-\frac{T}{\rho}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=f(x,t)$，其中 $f(x,y,t)=\frac{F(x,y,t)}{\rho}$.

令 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，则 $\boxed{u_{tt}-a^2\nabla^2u=f(x,y,t)\,.}$

应力张量 $\vec{T}=\begin{pmatrix}\tau_{11}\tau_{12}\tau_{13}\\ \tau_{21}\tau_{22}\tau_{23}\\ \tau_{31}\tau_{32}\tau_{33}\end{pmatrix}$，其中 τ_{kl} 是作用于垂直于 k 轴的平面上的力，

其方向沿 l 轴，如 τ_{xx} 是 yz 面上沿 x 轴的力 $(k,l=1,2,3)$.

刚体 $\vec{J}_0=\vec{I}\times\vec{\omega}$, 转动惯量张量 $\vec{I}=\begin{pmatrix}I_{11}I_{12}I_{13}\\ I_{21}I_{22}I_{23}\\ I_{31}I_{32}I_{33}\end{pmatrix}$,

$$I_{kl}\equiv\int\mathrm{d}m[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\delta_{kl}+(-1)^{\delta_{kl}}x_kx_l],$$

$I_{11}\equiv\int\mathrm{d}m(x_2^2+x_3^2)$ 为对 x 的转动惯量，$I_{12}=\int\mathrm{d}mx_1x_2=I_{21}=\int\mathrm{d}mx_2x_1$ 为惯量积。

Review: 在上述振动问题中存在弹性力，一来有恢复力 $-k\nabla u$, 二来有加速度 u_{tt}, 所以是简谐振动的谐波。下面的输运现象是非可逆的，有 u_t.

4．热传导方程(3+1D 热传导现象,热传导定律和能量守恒)

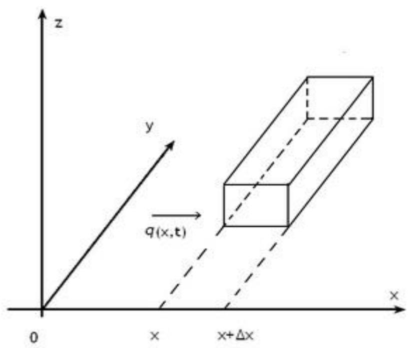
(1)定变量：点 (x,y,z) 在 t 时刻的温度为 $u(x,y,z,t)$（热量无法直接测量）。

(2)立假设: 1) 已知两个物理量:物质密度 $\rho(x,y,z)$—单位体积的质量;比热 $c(x,y,z)$—在单位质量中增加单位温度所产生的热量。

2) 给定物质内部的热源强度 $Q(x,y,z,t)$—在单位时间单位体积

内产生的热量。例如热核反应或者内部加热。

3) 物质内部热交换过程遵从 Fourier 定律（热传导定律）：流过物质内部任意曲面的热流强度（在单位时间内垂直通过单位面积的热量）$\vec{q}$ 与温度梯度成正比，即 $\vec{q} = -k\nabla u$，其中，$k>0$ 称为导热系数。$\vec{q}$ 为辅助量。



(3)取区域：体积元 ΔV，它的边界面为 S.

(4)找作用：在单位时间内，

通过整个 S 面流入的热量为（*）

$$-\oint\!\!\!\oint_S \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iiint_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{q}\,\mathrm{d}V;$$

ΔV 中物质产生的热量为 $\iiint_{\Delta V} Q\mathrm{d}V$；

温度升高所需热量为 $\iiint_{\Delta V} c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$.

(5)列方程：由物质内部热交换过程的能量守恒定律，有

$$\iiint_{\Delta V} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V(\text{热增}) = -\iiint_{\Delta V}\nabla\cdot\vec{q}\,\mathrm{d}V(\text{吸热}) + \iiint_{\Delta V} Q\mathrm{d}V(\text{热源}).$$

（*）：例如上图中 $\hat{x}$ 方向、通过 yz 截面在 Δt 时间内体积元 ΔV 吸热：

$$q|_x\,\Delta y\Delta z\Delta t - q|_{x+\Delta x}\,\Delta y\Delta z\Delta t = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)\Delta V\Delta t = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})\Delta V\Delta t.$$

同理可得另外两个方向的结果。上式首个等式的三维形式正好是高斯公式（将面积分化为体积分），末个等式用到了热传导定律。

由于 ΔV 是任意的，因此，

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{q} + Q \Rightarrow c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + Q.$$

如果 ρ 和 c 是常数，令 $a^2 = \dfrac{k}{\rho c}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = f(x,y,z,t)，\text{其中 } f(\vec{r},t) = Q/c\rho.$$

稳定态 $(\dfrac{\partial u}{\partial t}=0): \nabla^2 u = -\dfrac{f}{a^2}$ (Piosson eq.);

无外源 $(f=0): \nabla^2 u = 0$ (Laplace eq.）.

5．扩散方程（扩散现象、扩散定律和质量守恒）

特征量：particle density $\rho(\vec{r},t)$.

辅助量：current density $\vec{j}(\vec{r},t)$(在单位时间流过单位面积的质量)。

扩散定律：$\vec{j}=-D\nabla\rho \quad (\vec{j}\equiv\rho\vec{v})$. D为扩散系数。

微元：进入体积元ΔV内的质量

$$=-(\bar{j}_x{}'+\bar{j}_y{}'+\bar{j}_z{}')\Delta V\Delta t \underset{\text{定律}}{\overset{\text{扩散}}{=}} [\frac{\partial}{\partial x}(D\rho_x{}')+\frac{\partial}{\partial y}(D\rho_y{}')+\frac{\partial}{\partial z}(D\rho_z{}')]\Delta V\Delta t.$$

质量增加：$\Delta\rho\Delta V=\rho_t\Delta V\Delta t$.（为何没有空间导数？在微元内！）

质量守恒：$\rho_t\Delta V\Delta t=[\frac{\partial}{\partial x}(D\rho_x{}')+\frac{\partial}{\partial y}(D\rho_y{}')+\frac{\partial}{\partial z}(D\rho_z{}')]\Delta V\Delta t.$

均匀系统：$\rho_t-D\nabla^2\rho=0$.

有源（例如核反应或者内部粒子产生源）：

$$f(\vec{r},t)=\frac{\Delta m/\Delta t}{\Delta V}: \quad \rho_t-D\nabla^2\rho=f;$$

稳定：$D\nabla^2\rho=-f$；无源：$\nabla^2\rho=0$.

6．1）静电场方程：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho(x,y,z)/\varepsilon_0,\ \text{又因为}\nabla\times\vec{E}=0\text{，必有}\ \vec{E}=-\nabla u(x,y,z),$$

$$\nabla^2 u=-\rho(x,y,z)/\varepsilon_0,\ \text{(Piosson eq.)}.$$

2）真空中 Maxwell Equations：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t,$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t.$$

3）EM Wave Equations:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}},\quad \text{无源：}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times\left(-\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)+\nabla^2\vec{E},$$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{E}=0.$ They are just the EM Wave Equations

7．Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u+V(\vec{r})u.$$

Schrödinger 方程不是输运方程。 如果方程和边界条件均可分离变量，则分离变量法：设 $u(\vec{r},t)=R(\vec{r})T(t)$ [取此特解形式，可得 $T(t)$ 是振荡函数，而与 $\vec{r}$ 无关，$R(\vec{r})$ 是幅度函数，与 t 无关]，将此 $u(\vec{r},t)$ 代入方程，即得

$$i\hbar R(\vec{r})T'(t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R(\vec{r})T(t)+V(\vec{r})R(\vec{r})T(t).$$

等式两端除以 $R(\vec{r})T(t)$, 就有 $i\hbar\frac{T'(t)}{T(t)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})}+V(\vec{r})\equiv E.$

后一个方程在适当条件下构成本征值问题，从而可解得本征值 E_n. 再解另外一个方程得 $T_n(t)=T_n(0)e^{-iE_nt/\hbar}$. 如果 $E_n=\operatorname{Re}E_n$，则 Schrödinger 方程是波动方程。 如果 $E_n=\operatorname{Re}E_n+i\operatorname{Im}E_n$，则特解是 $T_n(t)=T_n(0)e^{\operatorname{Im}E_nt/\hbar}e^{-i\operatorname{Re}E_nt/\hbar}$. 当 $\operatorname{Im}E_n<0$ 时，它指数衰减（衰竭），当 $\operatorname{Im}E_n>0$ 时，它指数增加（爆炸）。

三、二阶线性偏微分方程的分类和化简（不要求）

a) 两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0.$$

b) 自变量变换时方程的性质

设 $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$, $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$（这时可唯一解出 x,y），

雅克比行列式：$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x},\frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}$,

这儿仅为 $\frac{\partial\xi}{\partial x}\neq 0,\frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0,\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0,\frac{\partial\eta}{\partial y}\neq 0.$

于是 $u(x,y)\Rightarrow u(\xi,\eta)$（变换后的函数仍用同一符号 u）

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+\Phi=0\,,$$

其中，$A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2$,

$$A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\,,$$

$$A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y\,,$$

$\Phi=B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F$，其中，

$$B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\,,$$

$$B2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\,,$$

$$C=c\,,F=f\,.$$

结论：二解线性偏微分方程经过自变量的可逆变换后，仍为二解线性偏微分方程。

变换的确定：变换的目的是化简方程，便于求解。为此，令 $A_{11}=0$，$A_{22}=0$，方程即可简化。即

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0, \tag{a}$$

$$a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2=0. \tag{b}$$

从中解出 $\xi=\xi(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$，即所求化简方程的变换。如何从(a),(b)中解出 $\xi=\xi(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$，由下述定理给出：

定理：设一阶二次常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0$$

有两个解：$\varphi(x,y)=c$，$\psi(x,y)=d$（c,d 为常数），则 $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ 必分别满足方程(a),(b).

证明：将 $\varphi(x,y)=c$ 两边对 x 求偏导，有，$\varphi_x+\varphi_y y'=0$，即，$y'=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$.

既然 $\varphi(x,y)=c$ 所决定的隐含数 $y=y(x)$ 是方程

$a_{11}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0$ 的解，则将 $y'=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 代入，有

$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$，此即方程(a),(b).

同样可证，$\psi(x,y)=d$ 满足方程（(a),(b).

$\boxed{a_{11}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0}$ 称为特征方程。由本定理可得，

$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ 即为方程简化的变换。

c) 化简方程的步骤

1) 写出特征方程 $a_{11}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0$.

注意：x,y 本是偏微分方程的自变量，在此方程中应暂时将 y 看作 x（或将 x 看作 y ）的函数。其次，将 y 看作 x 的函数时，$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$ 的系数应是 u_{xx} 的系数；将 x 看作 y 的函数时，$\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2$ 的系数应是 u_{yy} 的系数。

2) 求解特征方程，得 $y'=\dfrac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$.

3) 积分后得 $\begin{cases}\varphi(x,y)=c\\ \psi(x,y)=d\end{cases}$ 称为特征线。

4) 作变换：

$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$，代入方程 $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$，

则得以 ξ,η 为自变量的并且已化简（$A_{11}=0$，$A_{22}=0$）的新偏微分方程。

d) 方程的分类与标准形式

根据判别式 $\Delta(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ 的符号可以将方程分为三种类型：

$\Delta>0$ 双曲型 有两族不同的实特征线

$\Delta < 0$ 椭圆型 有两族不同的虚特征线，$\psi = \varphi^*$

$\Delta = 0$ 抛物型 有一族实特征线

混合型：在自变量的不同区域内方称为不同类型时，该方程称为混合型方程。

标准形式：

1) 双曲型：作变换$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \psi(x,y)\end{cases}$，得， $u_{\xi\eta} + \Phi_1 = 0$ （$\Phi_1 = \dfrac{\Phi}{2A_{12}}$），

或再作变换$\begin{cases}\rho = \dfrac{\xi+\eta}{2}\\ \sigma = \dfrac{\xi-\eta}{2}\end{cases}$，得，$u_{\rho\rho} - u_{\sigma\sigma} + \Phi_2 = 0$ （$\Phi_2 = 4\Phi_1$）.

2) 椭圆型：作变换$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \varphi^*(x,y)\end{cases}$，得， $u_{\xi\eta} + \Phi_1 = 0$ （$\Phi_1 = \dfrac{\Phi}{2A_{12}}$），

或再作变换$\begin{cases}\rho = \dfrac{\xi+\eta}{2}\\ \sigma = \dfrac{\xi-\eta}{2i}\end{cases}$，得，$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + \Phi_3 = 0$ （$\Phi_3 = 4\Phi_1$）.

3) 抛物型：作变换$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \psi(x,y)(\text{任意函数})\end{cases}$（因只有一族特征线），但要

求$\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$，例如取$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = y\end{cases}$，得标准形式，

$u_{\eta\eta} + \Phi_4 = 0$ （$\Phi_4 = \dfrac{\Phi}{A_{22}}$）.

容易看出： 振动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ 是双曲型的;

平面静电场方程 $u_{xx} + u_{yy} = -\dfrac{\rho(x,t)}{\varepsilon_0}$ 是椭圆形的;

一维热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ 是抛物型的。

** 不同类型的数学物理方程反映不同的物理特性:

双曲型方程反映波动性;

椭圆形方程反映场的稳定分布;

抛物型方程反映不可逆输运过程。

四、定解问题

第二节从物理问题和相应的物理定律导出了其所满足的多变量偏微分方程，但总是选择物体内部，不含端点或边界一小部分来讨论其运动状况。虽然这种处理反映出了物体内部各微元之间的相互联系，但是在区域内部相邻之间、相继时刻之间的这种联系（规律）通常与周围**环境**（通过边界传递）和初始时刻研究对象（体系）所处的状态无关。注：真实体系总有环境，需要动力学 or 统计处理；量子体系中，测量就要扰动，更需要动力学 or 统计处理。

仅仅只有泛定方程还不足以确定物体的运动，这是因为 in Physics: 外界的作用通常是通过物体边界“传”到内部的；In Mathematics:一个方程可能有多个解，i.e 常微分方程通解中含有若干个任意常数或偏微分方程通解中含有若干个任意函数。下面将看到初始条件、边界条件和分离变量等可以完全确定它们的解。

求一个微分方程的解满足一定初始条件和边界条件等的问题称为定解问题：泛定方程加上定解条件[例如，初始条件、边界条件、衔接条件、自然(物理)条件和周期条件等]。如何给定这些定解条件呢？下面一一叙述。

1. 初始条件：例如 1+1D 波动方程的初始条件为

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

2. 边界条件—一般情况下，二阶微分方程的三类常用边界条件：

i. 第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）：直接给出未知函数在边界上的值。

ii. 第二类边界条件（Neumann 边界条件）：给出未知函数在边界上法向导数的值。

iii. 第三类边界条件：给出未知函数和其边界法向导数在边界上的线性关系。

Note：初始条件和边界条件是体系的场运动规律在初始时刻和边界区域的极限。

例 1．对 1+1D 弦的横振动问题导出下列情况的初始条件：

（1）弦的两端点 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，用手将弦上的点 $x=c\ (0<c<l)$ 拉开使之与平衡位置的偏离为 h（$h<<l$），然后放手[见习题 9.7(1)]；

（2）弦的两端点 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，以槌击弦上的点 $x=c\ (0<c<l)$ 使之获得冲量 I [见习题 9.7(3)].

解：

（1）　由点 $x=c$ 的初始位移求出其他点的初始位移，它们是两段直线方程，

容易求得，$u|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & (0\le x\le c)\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x), & (c\le x\le l)\end{cases}$

显然，$u_t|_{t=0}=0 \quad (0\le x\le l).$

（2）　由题意，$u|_{t=0}=0\,(0\le x\le l)$. 将冲量 I 看作均匀分布在小段 $c-\dfrac{\varepsilon}{2}<x<c+\dfrac{\varepsilon}{2}$（$\varepsilon$ 是小量）内，于是由冲量定理（系统获得动量）$\int_0^l \rho u_t|_{t=0}\mathrm{d}x=I$, 得

$\rho\varepsilon u_t|_{t=0}=I$，即 $u_t|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{I}{\rho\varepsilon} & |x-c|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ 0 & |x-c|>\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$，

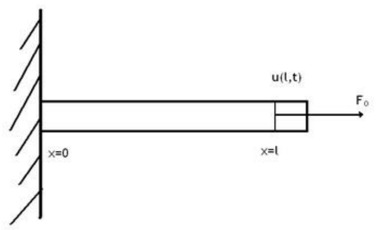
取极限 $\varepsilon\to 0$，由 δ 函数定义，得 $u_t|_{t=0}=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-c)$.

例 2．导出长为 l 的杆的 1+1D 纵振动问题在下列情况的边界条件：

（1）一端固定，令一端受纵向拉力 F_0 的作用；

（2）一端固定，另一端与一倔强系数为 k 的弹簧连接[见习题 9.8(4)]。

解：(1) 设杆的 $x=0$ 端固定，即有 $u|_{x=0}=0$ – 第一类齐次边界条件。为导出 $x=l$ 端的边界条件，考察杆右端的一小段 $[l-\Delta x,l]$ 的运动情况。类似于泛定方程的推导，它的运动方程是（注意：没有 $l+\Delta x$ 端）

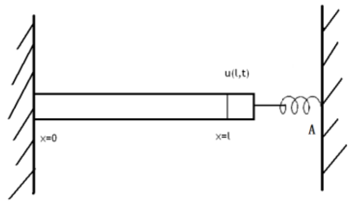


$$\rho S\Delta x u_{tt}=F_0-P(l-\Delta x,t)S=F_0-Yu_x|_{x=l-\Delta x}S,$$

令 $\Delta x\to 0$ 且 u_{tt} 有限（否则拉断），得 $u_x|_{x=l}=\dfrac{F_0}{YS}$ --- 第二类、非齐次边界条件。

注：1) 如果 $x=l$ 是自由端（即不受外力的作用），即 $F_0(t)=0$，则 $u_x|_{x=l}=0$ --- **自由**，第二类、齐次边界条件。

2) 如果 $x=l$ 端固定，即 $u|_{x=l}=0$，$x=0$ 端受纵向**拉力** $F_0(t)$ 的作用（沿 $-\hat{x}$），类似地，可得 $u_x|_{x=0}=\dfrac{F_0}{YS}$（左右对称性）---第二类、非齐次边界条件。



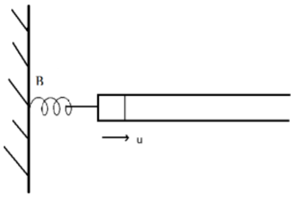
(2) 设杆的 $x=0$ 端固定，另一端 $x=l$ 与一倔强系数为 k 的弹簧连接（A 端固定），那么此时的弹性力 $F_0=-ku|_{x=l}$（等价于熟悉的弹簧模型），则有

$$u|_{x=0}=0\text{，}\ u_x|_{x=l}=-\frac{k}{YS}u|_{x=l}\text{，或改写为，}$$

$$(u_x+hu)|_{x=l}=0\text{，其中 } h=\frac{k}{YS}>0\text{（必须的）. 这是第三齐次边界条件。}$$

注：1）如果 $x=l$ 端固定，$x=0$ 端与一倔强系数为 k 的弹簧连接（B 端固定），那么此时的弹性力 $F_0=-ku|_{x=0}$（沿 $-\hat{x}$），则有 $u|_{x=l}=0$，$u_x|_{x=0}=\dfrac{k}{YS}u|_{x=0}$，或改写为，$(u_x-hu)|_{x=0}=0$.（$-h<0$ 物理上必须满足的）

2）如果 B 端非固定，而是按给定的 $u_0(t)$ 规律运动，则弹簧的实际压缩为 $u(l,t)-u_0(t)$. 有 $(u_x-hu)|_{x=l}=-hu_0(t)$.



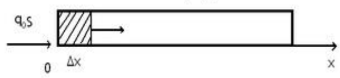
综合两端点的边界条件可见，本小题是第三类非齐次边界条件。所有 $h>0$ 在物理上是必须的。

例 3．导出长为 l 的杆的一维热传导问题在下列情况的边界条件：

（1）$x=0$ 端保持恒温 T_0，$x=l$ 端绝热（即热流为 0）；

（2）两端均有强度为 q_0 的热流<u>**流入**</u>；

（3）两端以牛顿冷却定律与周围介质（其温度恒为 u_0）进行热交换。



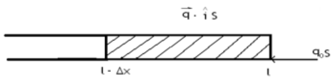
解：（1）显然，$u|_{x=0}=T_0$，利用 $\vec{q}\cdot\hat{i}|_{x=l}=0$，

以及 $\vec{q}=-k\nabla u$，即得 $u_x|_{x=l}=0$ ---**绝热**；

（2）考察杆左小段 $[0,\Delta x]$ 的热量守恒问题（设杆的侧面是

绝热的)，有 $c\rho S\Delta x u_t\big|_{x=0} = q_0 S - \vec{q}\cdot\hat{i}\big|_{x=\Delta x} S = q_0 S + k u_x\big|_{x=\Delta x} S$，令 $\Delta x\to 0$ 且 u_t 有限（否则热爆），得 $u_x\big|_{x=0} = -\dfrac{q_0}{k}$；

考察杆的右小段 $[l-\Delta x, l]$ 的热量守恒问题，有



$c\rho S\Delta x u_t\big|_{x=l} = q_0 S + \vec{q}\cdot\hat{i}\big|_{x=l-\Delta x} S = q_0 S - k u_x\big|_{x=l-\Delta x} S$. 令 $\Delta x\to 0$ 且 u_t 有限，得

$$u_x\big|_{x=l} = \frac{q_0}{k}.\ \text{（另一种左右对称性)}$$

(2) 所谓牛顿冷却定律（使得交换成为可能，否则超交换或绝热）是指，在介质边界面 S 上，热流强度 $\vec{q}$ 的外法线分量与介质温度 $u\big|_S$ 和环境温度 u_0 之差成正比，即

$$\vec{q}\cdot\hat{n} = -k\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\bigg|_S = b\left(u\big|_S - u_0\right)，\text{其中比例常数 } b>0 \text{ 称为热交换系数。}$$

在 $x=l$ 端，$\hat{n}$ 的方向就是 x 轴的正方向。因此，由上式立得

$$\left(u_x + hu\right)\big|_{x=l} = hu_0，\quad \text{其中 } h = \frac{b}{k} > 0.$$

在 $x=0$ 端，$\hat{n}$ 的方向就是 x 轴的负方向。所以，$\dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \dfrac{\partial u}{\partial(-x)} = -u_x$，

故 $\left(u_x - hu\right)\big|_{x=l} = -hu_0$. 所有 $h>0$ 在物理上是必须的。

3. 衔接条件（自然界存在的一类物理条件）

如果系统是由几种不同特性的介质组成，则在两种介质的交界面处，还需要衔接条件；二阶微分方程要求在每个交界面上给定两个衔接条件。

例1. 在 1+1D 杆的纵振动问题中，如果杆是有两种材料连接而成的，它们的杨氏模量分别是 Y_1 和 Y_2. 设连接点在 $x=c$ 处，两种材料的杆的纵位移分别为 $u_1(x,t)$ $(x\le c)$ 和 $u_2(x,t)$ $(x\ge c)$，则一个衔接条件是位移的连续性（杆不致断裂）：$u_1(x,t)\big|_{x=c} = u_2(x,t)\big|_{x=c}$；另一个衔接条件是应力的连续性（由作用和反作用定律而得）：$Y_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=c} = Y_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=c}$.

例2. 在 3+1D 静电场问题中，在两种电介质（介电常数分别为ε_1和ε_2）的交界面S上，电势应当连续：$u_1\big|_S = u_2\big|_S$.

电位移矢量$\vec{D}_1$和$\vec{D}_2$的法向分量也应当连续：$\left(\vec{D}_1\right)_n\Big|_S = \left(\vec{D}_2\right)_n\Big|_S$.

利用线性介质中电位移矢量$\vec{D}$与电场强度$\vec{E}$和电势u的关系，$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla u$，上式即为 $\varepsilon_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{n}}\Big|_S = \varepsilon_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{n}}\Big|_S$.

例3. In the quantum mechanics，the continue condition is $\psi_1 = \psi_2$，and the current continue condition is $\dfrac{1}{m_1}\nabla\psi_1 = \dfrac{1}{m_2}\nabla\psi_2$.

4. 自然条件和周期条件（自然界存在的另外一类物理条件）

这是特别的物理要求。其实上述各条件均是物理要求，均服从其对应的运动规律。换言之，受人的表现手法的限制，人们只找了这些类别。自然条件就是说本质上有一定的物理要求。周期条件与对称性相关（对称美、对称破缺存在更高级的美）。如果是非物理条件，一来不与泛定方程在边界（界面）上自洽，二来给不出物理解。

五、线性方程的迭加原理

$L[u] = f$，其中L为线性算符（只出现各阶偏导的一次幂函数u）。

1. 线性迭加原理

凡能用线性方程描写的物理现象必具有“迭加性”，这在物理学中称为“线性迭加原理”—几个物理量同时存在时所产生的效果，必等于各个物理量单独存在所产生的效果之和。其表现形式为：

性质 1：设u_i满足线性方程（或定解条件）$L[u_i] = f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，则它们的线性组合$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$必满足方程（或定解条件）：$L[u] = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$.

显然，如果u_i满足齐次方程（或齐次定解条件），则u也满足相应的齐次方程（或齐次定解条件）。

性质 2：设u_i满足线性方程（或定解条件）$L[u_i]=f_i \quad (i=1,2,\cdots)$，则它们的线性组合$u=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i$必满足方程（或定解条件）：$L[u]=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i$.

* 显然，如果u_i满足齐次方程（或齐次定解条件），则 u 也满足相应的齐次方程（或齐次定解条件）。** 设求和运算$\sum_{i=1}^{\infty}$ 与微分算符 L 可以交换（相变时就不满足了）。

性质 3：设$u(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)$满足线性方程(或定解条件)：$L[u]=f(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)$，其中$\vec{r}=(x,y,z)$，而$\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$和$t_0$都是参量，则$v(\vec{r},t)=\int\iiint u(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)\mathrm{d}\vec{r}_0\mathrm{d}t_0$必满足方程（或定解条件）：$L[v]=\int\iiint f(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)\mathrm{d}\vec{r}_0\mathrm{d}t_0$.

* 显然，如果u满足齐次方程（或齐次定解条件），则v也满足相应的齐次方程（或齐次定解条件）。 ** 设积分运算与微分算符 L 可以交换。

2. 一般初边值问题的分解：

$$\underset{}{\begin{cases} L[u]=f, \\ \sim|_{\Sigma}=g, \\ u|_{t=0}=\varphi, \\ u_t|_{t=0}=\psi. \end{cases}} = \underset{\mathrm{I}}{\begin{cases} L[u]=0, \\ \sim|_{\Sigma}=0, \\ u|_{t=0}=\varphi, \\ u_t|_{t=0}=\psi. \end{cases}} + \underset{\mathrm{II}}{\begin{cases} L[u]=0, \\ \sim|_{\Sigma}=g, \\ u|_{t=0}=0, \\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}} + \underset{\mathrm{III}}{\begin{cases} L[u]=f, \\ \sim|_{\Sigma}=0, \\ u|_{t=0}=0, \\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}}$$

解出问题 I、II、III 得u_1,u_2,u_3,则一般问题的解为$u=u_1+u_2+u_3$.求解问题 I 是基础，问题 II 可以转化为 I 或 III（边界条件齐次化方案），问题 III 有多种解法。

求解定解问题一般分为三个步骤：1.分析，即设法找出它的形式解来。2.综合，即判断*解的适定性，*它包括判断解的存在性、唯一性、稳定性三个方面。3.解释，即讨论所得解的物理含义。

唯一性：何种定解条件下，对于哪一类函数，方程的解是唯一的;采用不同的方法，解的形式将不同，但它们应等价。

稳定性：定解条件的微扰导致解的变化；真实物理与理想模型有差别，精确求解与近似求解亦有差别；还有近似估算、误差分析等等，关键是否抓住了物理实质。

HW：9.4；9.8(3).