2

复变函数的积分

2.1 积分的定义和性质

复变函数积分的定义

类似于实变函数，可定义复变函数的积分。

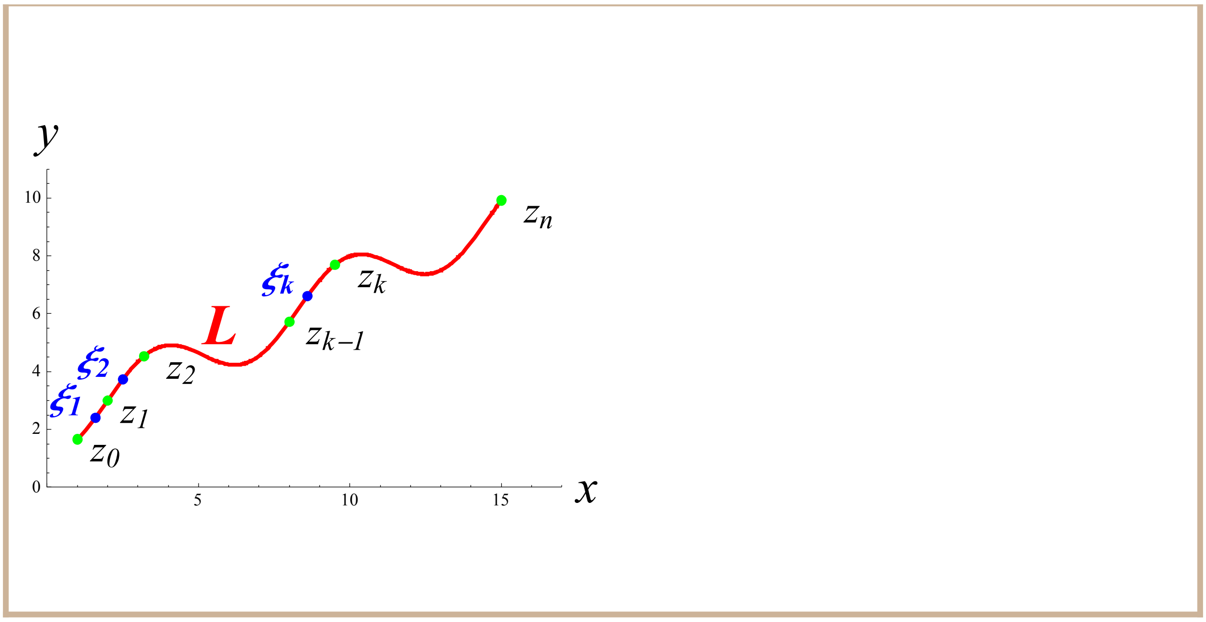
定义：设函数 $f(z)$ 在光滑或分段光滑的曲线 L 上有定义，则 $f(z)$ 沿 L 路线积分定义如下：

把曲线 L 分成 n 段，在每段 $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ 间任取一点 ξ_k，若求和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k \quad \text{的极限} \quad \lim_{\max\{|\Delta z_k|\}} S_n = \int_L f(z)\,dz \tag{1.1}$$

存在，则称极限值为 $f(z)$ 在 L 上的积分，记为：$\int_L f(z)\,dz$。

- 注意极限存在须与 1. 弧段的分法 2. ξ_k 在 z_{k-1} 到 z_k 间的取法 无关



$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0\\ \max|\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} (u_k + i\,v_k)\,(\Delta x_k + i\,\Delta y_k) = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0\\ \max|\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [u_k\,\Delta x_k - v_k\,\Delta y_k + i(u_k\,\Delta y_k + v_k\,\Delta x_k)]$$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (u\,dy + v\,dx)$$ 第二类曲线积分

- 若曲线 L 由参数方程确定，则可化为参数方程的积分

曲线 L：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L f[z(t)]\,dz(t) = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]\,z'(t)\,dt \implies$$ 实部与虚部两个一元函数的积分

复变函数积分的性质

- 若曲线 $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$，则

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)\,dz$$

- 若曲线 L 与 L^- 反向，则

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_{L^-} f(z)\,dz$$

- 线性：

$$\int_L [a_1\,f_1(z) \pm a_2\,f_2(z)]\,dz = a_1\int_L f_1(z)\,dz \pm a_2\int_L f_2(z)\,dz,$$ 其中 a_1，a_2 为常复数

- 不等式（在证明积分为 0 时常用）

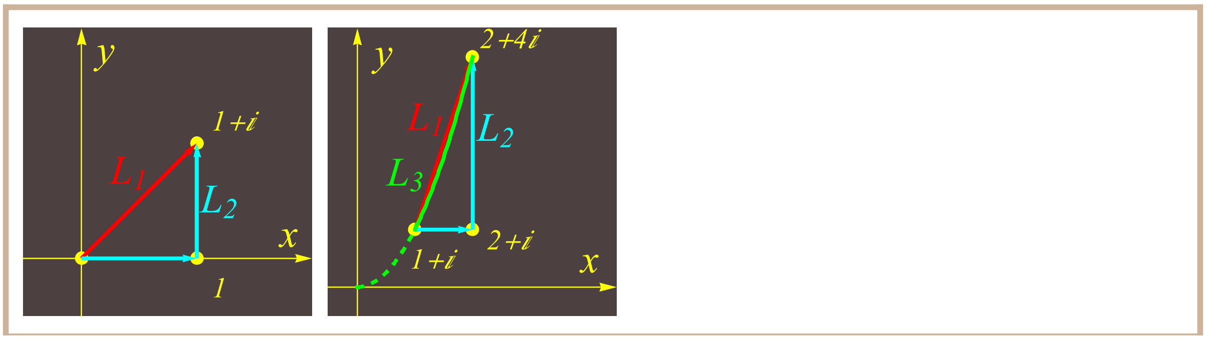
$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le \int_L |f(z)|\;|dz|$$

  - 证明：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|f(\xi_k)\right|\;\left|\Delta z_k\right|,$$ 两边取极限即得

- 上限：若 M 为 $|f(z)|$ 在曲线 L 上的上界，则

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le M\,l,$$ l 为曲线 L 的长度



例题：$I = \int_L \mathrm{Re}\,z\,dz$，$L$ 为：L_1 从原点到 $1+i$ 的直线；L_2 从原点到 1，再到 $1+i$

沿 L_1：$z = r\,e^{i\,\pi/4}$， $I = \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\frac{\pi}{4}\,d\left(r\,e^{i\,\pi/4}\right) = \int_0^{\sqrt{2}} r\;e^{i\,\pi/4}\cos\frac{\pi}{4}\,d\,r = \frac{1}{2}(1+i)$，

其中利用了复变函数的求导法则与实变函数同 ：$d\,z(t) = z'(t)\,d\,t$， $d\left(r\,e^{i\,\pi/4}\right) = e^{i\,\pi/4}\,d\,r$

沿 L_2： $I = \int_0^1 x\,d\,x + \int_0^1 1\,d\,y = \frac{1}{2} + i$

对本题的积分，积分路径不同时，积分值不同。

例题：$I = \int_L z^2\,d\,z$，L 为：L_1 从 $1+i$ 到 $2+4\,i$ 的直线；

L_2 沿直线 $1+i$ 到 $2+i$，再到 $2+4\,i$；

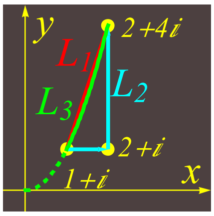
L_3 从 $1+i$ 沿过 0， $1+i$， $2+4\,i$ 的抛物线到 $2+4\,i$

沿 L_1：直线方程：$y = 3\,x-2$，

$$\Longrightarrow\ I = \int (x+i\,y)^2\,d\,(x+i\,y)，\ 以\ y = 3\,x-2\ 代入$$

$$= \int_1^2 [x+i\,(3\,x-2)]^2\,d\,[x+i\,(3\,x-2)]$$

$$= \int_1^2 [(1+3\,i)\,x-2\,i]^2\,(1+3\,i)\,d\,x = -\frac{86}{3}-6\,i$$



沿 L_2：第一段 $y=1$， $d\,y=0$， $I_1 = \int_1^2 (x+i\,)^2\,d\,x = \frac{4}{3}+3\,i$，

第二段：$x=2$， $d\,x=0$， $I_2 = \int_1^4 (2+i\,y)^2\,d\,(i\,y) = -30-9\,i$

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{86}{3}-6\,i$$

沿 L_3：抛物线方程：$y = x^2$ 代入

$$I = \int_{x=1}^{x=2} (x+i\,y)^2\,d\,(x+i\,y) = \int_{x=1}^{x=2} \left(x+i\,x^2\right)^2 d\left(x+i\,x^2\right)，\ 利用\ d\left(x+i\,x^2\right) = (1+2\,i\,x)\,d\,x$$

$$I = \int_{x=1}^{x=2} \left(x+i\,x^2\right)^2 (1+2\,x\,i)\,d\,x = \int_{x=1}^{x=2} \left(x^2+4\,i\,x^3-5\,x^4-2\,i\,x^5\right)d\,x = -\frac{86}{3}-6\,i$$

对本题的积分，积分路径不同时，积分值相同。

- 在什么情况积分值才与积分路径无关？

$$\int_L f(z)\,d\,z = \int_L (u\,d\,x - v\,d\,y) + i\int_L (u\,d\,y + v\,d\,x)\ \Longrightarrow\ 两个实变二元函数的第二类曲线积分$$

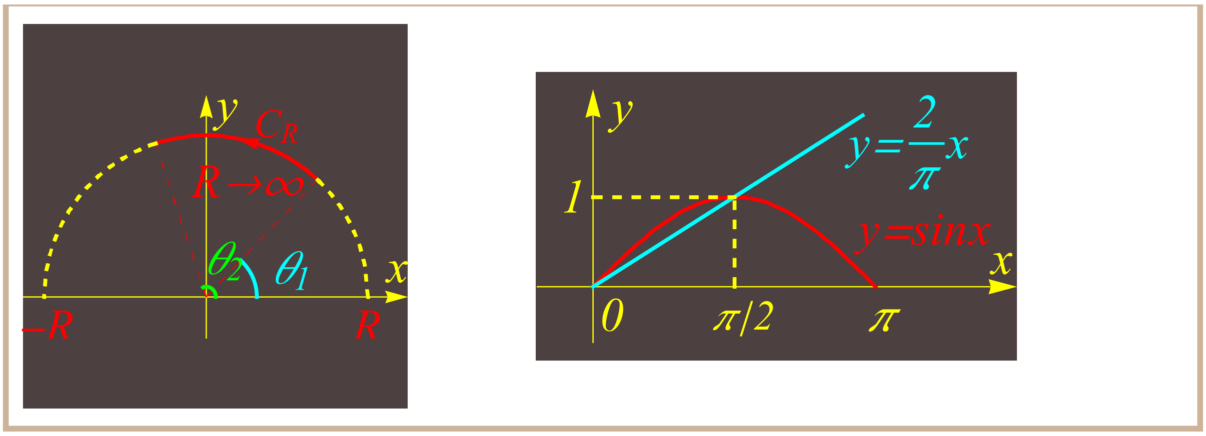
实二元函数第二类曲线积分 $\int_L (P\,d\,x + Q\,d\,y)$

积分值与积分路径无关的条件 ：$P_y = Q_x$

$\xRightarrow{\text{应用到复积分}}$ 若 u，v 满足 C−R 条件，则积分就可能与路径无关 。

是否解析函数的积分与路径无关 ？充分？必要？

其实还有其它条件 ：单连通有界区域 、一阶偏导数连续 。这就是下一节的 Cauchy 定理。



例题： 若 z 在上半平面及沿实轴趋于 ∞ 时， $z\,f(z)$ 一致趋于 0（与 z 趋于 ∞ 的辐角无关，只要其辐角 $\theta=\arg z$ 满足 $0\le\theta\le\pi$），即

如果： $\lim\limits_{z\to\infty} z\,f(z)=0,\quad 0\le\theta=\arg z\le\pi,$

则：沿上半平面任意一段圆心于原点半径为 R 的圆弧： $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$

证明：这是第一次遇到求证积分为 0 的问题，今后方法多与此相似。

要证明积分值为 0，只需证明积分值的模为 0。常利用 $\left|\int_L f(z)\,dz\right|\le\int_L |f(z)|\,|dz|$，下证之。

$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\le\int_{C_R}|f(z)|\,|dz|=I$，需证明： $\lim\limits_{R\to\infty} I=0$

$z=R\,e^{i\theta}\implies dz=R\,i\,e^{i\theta}d\theta\implies |dz|=R\,|d\theta|\implies |dz|=|z|\,|d\theta|$

$I=\int_{C_R}|f(z)|\times|z|\,|d\theta|=\int_{C_R}|z\,f(z)|\,|d\theta|<\varepsilon\int_{C_R}|d\theta|=\varepsilon\,|\theta_2-\theta_1|$

其中因为： $\lim\limits_{z\to\infty} z\,f(z)=0$，故 $\forall\,\varepsilon>0$， 可找到 R'，

使得当 $|z|>R'$ 时， $|z\,f(z)|<\varepsilon$，现取 $R>R'$，则有： $\int_{C_R}|z\,f(z)|\,|d\theta|<\varepsilon\int_{C_R}|d\theta|$

也就是说，无论给定多么小的 $\varepsilon>0$，均可找到一个 R''，当 $R>R''$ 时，$0<I<\varepsilon$

或更简单地，写成

$$I=\int_{C_R}|z\,f(z)|\frac{|dz|}{|z|}\le\max|z\,f(z)|\int_{\theta_1}^{\theta_2}|d\theta|=\max|z\,f(z)|\times|\theta_2-\theta_1|,$$

$R\to\infty$ 时，$z\,f(z)\to 0$，故 $\max|z\,f(z)|$ 可小于任意小量。

例题： Jordan 引理：若 z 在上半平面及实轴上趋于 ∞ 时， $f(z)$ 一致趋于 0，即

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0,\quad 0\le\theta=\arg z\le\pi,$

则沿上半平面任意一段圆心于原点半径为 R 的圆弧： $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,e^{imz}\,dz=0$，其中 $m>0$

证明：方法类似于上一题。在大圆弧 C_R 上，

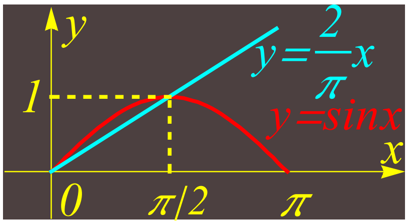
$z=R\,e^{i\theta}\implies dz=R\,i\,e^{i\theta}d\theta\implies |dz|=R\,|d\theta|\implies |dz|=|z|\,|d\theta|$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, e^{i\,m\,z}\, d\,z\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\left|e^{i\,m\,z}\right| |d\,z| \ = I$$

因为 z 为复数，$\left|e^{i\,m\,z}\right| \ne 1$，而是 $\left|e^{i\,m\,z}\right| = \left|e^{i\,m\,(R\cos\theta + i\,R\sin\theta)}\right| = e^{-m\,R\sin\theta}$

$$I = \int_{C_R} |f\,(z)| \times e^{-m\,R\sin\theta}\, R\,|d\,\theta| = \ \varepsilon\, R \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} e^{-m\,R\sin\theta}\,|d\,\theta|$$

注意此时 $\varepsilon \to 0$, 但 $R \to \infty$, 不能确定 $\varepsilon\, R \to 0$, 故需要算出对 θ 的积分。



对辐角大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的那一段圆弧，可通过变换 $\phi = \pi - \theta$ 化为一段辐角在 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的积分，

例如：$\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-m\,R\sin\theta}\,|d\,\theta| \ \xRightarrow{\phi=\pi-\theta}\ \int_{0}^{\pi/2} e^{-m\,R\sin\phi}\,|d\,\phi|$

对任一段辐角在 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的积分，利用 $0 \le \theta \le \pi/2$ 时有 $\sin\theta > \dfrac{2}{\pi}\theta$,

故：$\displaystyle\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} e^{-m\,R\sin\theta}\,|d\,\theta| \le \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} e^{-m\,R\,\frac{2}{\pi}\theta}\, d\,\theta = \frac{\pi\left(e^{-\,m\,R\,\theta_{\min}} - e^{-\,m\,R\,\theta_{\max}}\right)}{2\,m\,R}$

代入 I 可得：$\displaystyle I \ = \pi\,\varepsilon\, R\,\frac{e^{-\,m\,R\,\theta_{\min}} - e^{-\,m\,R\,\theta_{\max}}}{2\,m\,R} = \frac{\pi\,\varepsilon}{2\,m}\left(e^{-\,m\,R\,\theta_{\min}} - e^{-\,m\,R\,\theta_{\max}}\right) \to 0$

- 若 $m < 0$，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\, e^{i\,m\,z}\, d\,z \ = 0$ 则要求当 z 在下半平面趋于 ∞ 时，$f(z)$ 一致趋于 0。

  上一章提到的积分（见下）就是利用 $\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ 的任一段大圆弧上 C_R 上的积分为 0。当然还要利用一个闭合回路的积分为 0 把积分化为沿 $z + 1 = r\, e^{i\,\theta_0}$（固定 $\theta_0 = \dfrac{2}{3}\pi$，$r$ 从 0 到无穷）进行。至于什么条件下沿闭合路径积分为 0，下一节就将讨论。

$$\int_{-\infty}^{-1}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{17} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}}\ \cos(17\,x)\, \mathrm{d}\,x$$

2.2 Cauchy 定理

复变函数的积分实际上为两个二元实变函数的第二类（对坐标的）曲线积分。在什么条件下，积分值与路径无关？从二元实变函数的格林公式

$$\oint P\,d\,x + Q\,d\,y \ = \int\!\!\int\left(\frac{\partial\,Q}{\partial\,x} - \frac{\partial\,P}{\partial\,y}\right) d\,x\,d\,y \ = \int\!\!\int (Q_x - P_y)\,d\,x\,d\,y$$

可知，如果 $P_y = Q_x$，实变函数的第二类曲线积分则积分就与路径无关，从而复变函数积分

$$\int f(z)\,d\,z = \int (u\,d\,x - v\,d\,y) + i\int (u\,d\,y + v\,d\,x)$$

与积分路径无关的条件是：$u_y = -v_x$ 且 $u_x = v_y$ $\Longleftarrow$ C-R 条件 + 格林公式的条件 。

单连通区域的Cauchy定理

定理：设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意一光滑或分段光滑闭合回路的积分为 0。

$$\oint f(z)\, dz = 0$$

证明：

$$I = \oint f(z)\, dz = \oint (u\, dx - v\, dy) + i \oint (u\, dy + v\, dx),$$

应用格林公式：$\oint P\, dx + Q\, dy = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

$$I = \int\int \left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] dx\, dy + i \int\int \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy = 0,$$

最后一步应用了 $C-R$ 条件

- 格林公式成立的条件： 除单连通之外，还要求 P_y, Q_x 连续。对应于复变函数积分，就要求 u_x, u_y, v_x, v_y 四个偏导数连续，但我们仅已知复变函数函数解析，解析的充要条件是： $f(z)$ 连续和C-R条件。解析并不保证四个偏导数连续（即使 u, v 可微，也不保证四个偏导数连续，后者只是前者的充分条件。）因此，利用格林公式证明Cauchy定理是不严格的。更严格的证明可参见：Ahlfors, Complex Analysis, 阿尔福斯 《复分析》 赵志勇等译 Chap. 4。

```
(* 把工作目录设置成文件所在的目录 *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Import["fig02.01 complexanalysis.jpg", ImageSize → 100]
```

L. V. Ahlfors：哈佛数学教授 。1936 年获菲尔兹奖 。1953 年美国科学院院士 。1981 年获沃尔夫奖 。

书中许多

"clearly, obviously, evidently, it is easy to see, it is not difficult to see, it is plain that, it is readily seen that" 等等 。

"They are not used to blur the picture. On the contrary,
they test the reader's understanding, for if he does not agree that the omitted reasoning is clear,
obvious, and evident, he had better turn back a few pages and make a fresh start?"

历史上，该定理最早是在 $f'(z)$ 连续（也即四偏导数连续）条件下，应用格林公式证明，而后Goursat在不用此条件的情况下加以证明，因此，此定理也被称为Cauchy-Goursat定理。

- 前曾经介绍过一个定理，若一个复变函数在某区域解析，则 $f'(z)$, $f''(z)$, ... 也都解析。但这实际上是 Cauchy 定理的推论，不可用于证明Cauchy定理。

- 闭合回路积分为 0 的条件还可放宽为 ： D 内解析，
  $\overline{D} = D + C$ 内连续 （即边界只需连续 ）， 仍有 $\oint_l f(z)\, dz = 0$，其中回路可以是边界 C。

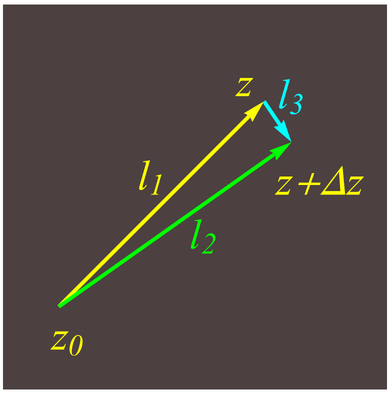
- 推论：单连通区域 D 内的解析函数的积分只与起点和终点有关，与路径无关。

原函数和定积分公式

定理：若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内单值解析，积分与路径无关，

那么 $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ 与路径无关，对于一个 z 值，就有确定的一个值 $F(z)$ 与之对应，那么

$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ 是一个单值解析函数，$F'(z)=f(z)$ 并且 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1)$



证明：先证明解析，对 $z\in D$,

$$\Delta F = F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = \int_{l_1+l_3} f(\xi)\,d\xi - \int_{l_1} f(\xi)\,d\xi = \int_{l_3} f(\xi)\,d\xi$$

因为 $f(z)$ 可导，必连续， $\forall\,\varepsilon>0$， $\exists\,\delta(\varepsilon)$， 使得当 $|\xi-z|<\delta$ 时， $|f(z)-f(\xi)|<\varepsilon$，

求导时 $\Delta z\to 0$， 故可取 $|\Delta z|<\delta$， 那么在 l_3 上， $|f(z)-f(\xi)|<\varepsilon$，

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{l_3} f(\xi)\,d\xi - f(z)\right|$$ （无论 Δz 以何种方式 $\to 0$，积分均可沿直线进行，因为与路径无关）

$$= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{l_3} [f(\xi)-f(z)]\,d\xi\right| \le \left|\frac{1}{\Delta z}\right| \int_{l_3} |f(\xi)-f(z)|\;|d\xi|$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\int_{l_3} |d\xi| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\,|\Delta z| = \varepsilon$$

由于 ε 可以任意小 $\Longrightarrow F'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$

$F'(z)=f(z)$，故 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的原函数。

类似于实变函数，下证 $f(z)$ 的原函数之间只差一个常数。

$G'(z)=F'(z)=f(z)$，令 $G(z)-F(z)=h(z)$， $h'(z)=G'(z)-F'(z)=0$

$h(z)=u+i\,v$， $h'(z)\Longrightarrow u_x=u_y=v_x=v_y=0 \quad\Longrightarrow h(z)=$ 常数。

$G(z)-F(z)=c$， $G(z)=F(z)+c=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + c \quad\Longrightarrow G(z_0)=c$

$\Longrightarrow G(z)-G(z_0)=G(z)-c=F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = F(z)-F(z_0)$， 其中 $F(z_0)=0$

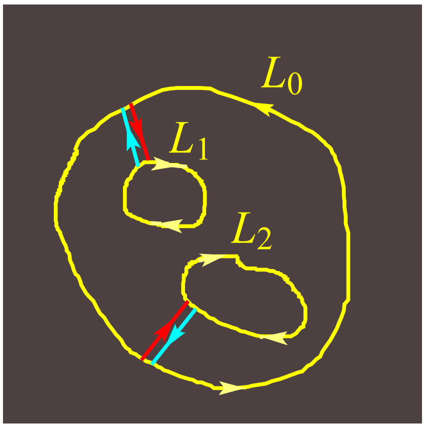
- $f(z)$ 的所有原函数的集合称为 $f(z)$的不定积分。

复连通的Cauchy定理

定理： $f(z)$ 在闭复连通区域 $\overline{D}$内解析，则 $f(z)$沿所有内外边界线正向积分和为 0。

$$\oint f(z)\,dz = \oint_{L_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)\,dz = 0$$

证明：如下图作割线，变为单连通，如图绕行即可。



推论：闭复连通区域 $\overline{D}$内的单值解析函数，沿外境线逆时针走向的积分等于沿所有内镜线逆时针走向积分和。

推论：在 $f(z)$的解析区域中，积分回路连续变形，积分值不变。

例题：求积分 $I_n = \oint_C (z-a)^n\, dz$， C 为包围 a 点的任意一条闭合回路。

- $n \geq 0$ 时，被积函数是解析函数， $I_n = 0$；
- $n < -1$ 时，把 C 变形为圆心于 a，半径为 ε 的圆周

在 C，$z = a + \varepsilon\, e^{i\theta} \implies dz = \varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta \implies I_n = \oint_C (z-a)^n\, dz = \int_0^{2\pi} \varepsilon^n\, e^{i\, n\, \theta}\, \varepsilon\, i\, e^{i\,\theta}\, d\theta$

$$I_n = i\, \varepsilon^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\,(n+1)\,\theta}\, d\theta = \left[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\, e^{i(n+1)\,\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$$

- $n = -1$ 时，把 C 变形为圆心于 a，半径为 ε 的圆周

$$I_n = \oint_C \frac{dz}{(z-a)} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\, i\, e^{i\,\theta}}{\varepsilon\, e^{i\,\theta}}\, d\theta = 2\,\pi\, i$$

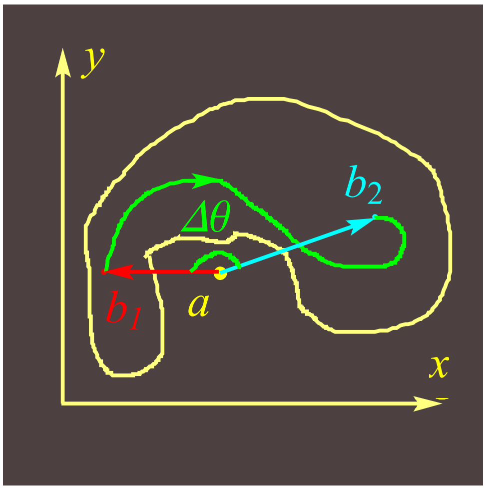
综合：$I_n = \oint_C (z-a)^n\, dz = 2\,\pi\, i\, \delta_{n,-1}$， $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$ —— Kronecker 符号

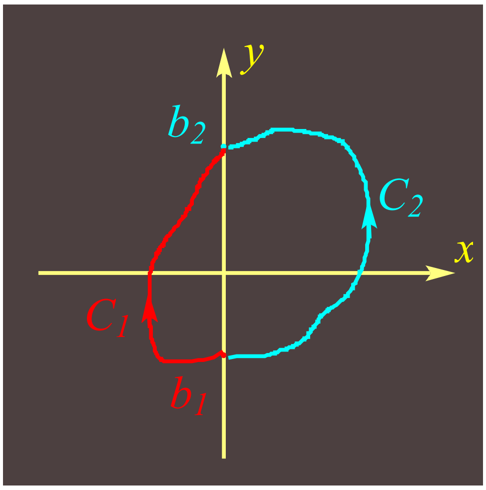
例题：求积分 $I_n = \int_C (z-a)^n\, dz$， C 为从 b_1 到 b_2 的一条路径，如上右图。

选取一解析区，如下右图黄色闭合回路围成的区域，在此解析区域里，积分可利用原函数概念。

- $n \neq -1$ 时

$$I_n = \int_{b_1}^{b_2} (z-a)^n\, dz = \left[\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}\right]_{b_1}^{b_2} = \frac{(b_2-a)^{n+1} - (b_1-a)^{n+1}}{n+1}$$





- $n = -1$ 时

$$I_{-1} = \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{z-a} dz = [\ \mathrm{Ln}\,(z-a)\ ]_{b_1}^{b_2},$$

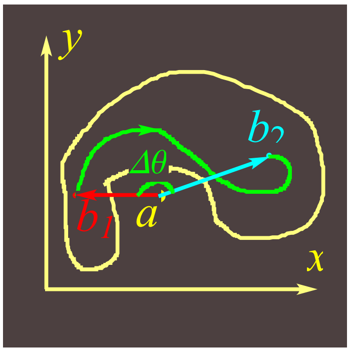
但 $\mathrm{Ln}\, z$ 是多值函数，

$\mathrm{Ln}(b_2 - a) = \ln |b_2 - a| + i \arg(b_2 - a) + i\, 2\, k\, \pi$ 值不确定

积分与路径有关 。

如图积分从 b_1 沿绿线到达 b_2，$\arg(z-a)$ 顺时针转过 $\Delta\theta$

因此：$I_{-1} = \ln \left| \dfrac{b_2 - a}{b_1 - a} \right| - i\, \Delta\theta$



为简单起见，取 $a = 0$，$b_1 = -2\, i$，$b_2 = 3\, i$， C_1 从 b_1 跨过负实轴到达 b_2， C_2 从 b_1 跨过正实轴到达 b_2。

沿 C_1：相对于原点， 顺时针转 π，

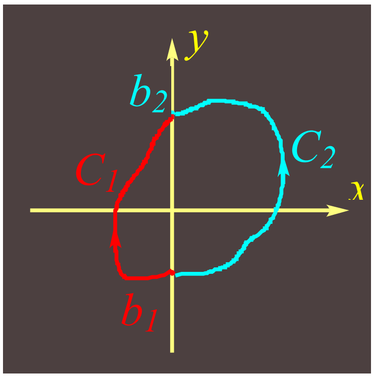
即：$\Delta\arg z = -\pi$, $I_{-1} = \displaystyle\int_{-2\,i}^{3\,i} \frac{1}{z} dz = \ln \frac{3}{2} - i\,\pi$

沿 C_2：相对于原点，

逆时针转 π，$I_{-1} = \displaystyle\int_{-2\,i}^{3\,i} \frac{1}{z} dz = \ln \frac{3}{2} + i\,\pi$，

二者之差为：$\displaystyle\int_{C_2} + \int_{\overline{C_1}} = \int_{C_2} - \int_{C_1} = 2\,\pi\, i = \oint_C \frac{1}{z} dz$，

其中 $\overline{C_1}$ 为 沿 C_1 逆向的积分 。结果同上一例题 。



不妨从 b_1 经圆心于原点半径为 2 的圆周到达 $b_1' = 2\, i$，再沿虚轴到 $b_2 = 3\, i$，以验证。

结论：

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{z-a} dz = \ln \frac{|b_2 - a|}{|b_1 - a|} + i\, \Delta\theta$$

其中 $\Delta\theta$ 为由积分路径确定的 、复变量 $(z-a)$ 转过的角度 （逆时针为正顺时针为负 ）。

小圆弧引理与大圆弧引理

小圆弧引理：若 $f(z)$ 在 $z = a$ 的去心邻域内连续，在一段小圆弧 C_r： $z - a = r\, e^{i\,\theta}$， $\theta_1 \le \arg(z-a) = \theta \le \theta_2$ 上

$\lim\limits_{r\to 0} (z-a)\, f(z) = k$ *一致成立，则*

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = i\, k\, (\theta_2 - \theta_1)$$

说明：一致成立表明，对 $\forall\, \varepsilon > 0$，在 z 的辐角 $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ 区间，存在与 θ 无关的 δ，

使得当 $|\, z - a\,| < \delta$ 时，$|\, (z-a)\, f(z) - k\,| < \varepsilon$。

证明：证明积分值，化为证明积分为0，即：需要证明 $r \to 0$ 时，

$$I = \int_{C_r} f(z)\, dz - i\, k (\theta_2 - \theta_1) = 0，\text{在 } C_r \text{ 上：} \int_{C_r} \frac{dz}{z-a} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r\, e^{i\,\theta}\, i\, d\theta}{r\, e^{i\,\theta}} = i\, (\theta_2 - \theta_1)$$

$$I = \int_{C_r} \left(f(z) - \frac{k}{z-a} \right) dz = \int_{C_r} \frac{(z-a)\, f(z) - k}{z-a} dz，\text{需要证明 } r \to 0 \text{ 时此积分为 } 0$$

$$|I| \le \int_{C_r} \frac{|(z-a)\, f(z) - k|}{|z-a|} |dz| \le \varepsilon \int_{C_r} \frac{|dz|}{|z-a|} = \varepsilon \int_{C_r} \frac{r\, d\theta}{r} = \varepsilon\, (\theta_2 - \theta_1)$$

大圆弧引理：若 $f(z)$ 在无穷远点的去心邻域内连续，在一段大圆弧 C_R： $z = R\, e^{i\,\theta}$， $R \to \infty$， $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ 上

$\lim_{R\to\infty} z\,f(z) = K$ *一致成立*，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = i\,K\,(\theta_2-\theta_1)$$

证明：需要证明 $R\to\infty$ 时，

$$I = \int_{C_R} f(z)\,dz - i\,K\,(\theta_2-\theta_1) = 0，\text{在 } C_R \text{ 上}：\int_{C_R}\frac{dz}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{R\,e^{i\theta}\,i\,d\theta}{R\,e^{i\theta}} = i(\theta_2-\theta_1)$$

$$I = \int_{C_R}\left(f(z)-\frac{K}{z}\right)dz = \int_{C_R}\frac{z\,f(z)-K}{z}\,dz$$

$$|I| \le \int_{C_R}\frac{|z\,f(z)-K|}{|z|}\,|dz| \le \varepsilon\int_{C_R}\frac{|dz|}{|z|} = \varepsilon\,(\theta_2-\theta_1)$$

- 大圆弧与小圆弧定理今后常用，如何理解？

  要求一段圆弧上的积分 ： $\int_C f(z)\,dz$

  如果是小圆弧 （半径 $r\to 0$），积分弧长趋于 0，若 $f(z)$ 有界，

  则积分为 0，因此仅当 $f(z)$ 趋于无穷时 ，积分才不为 0。

  但 $f(z)$ 也不能是“高阶无穷”，因此仅在 $\lim_{r\to 0}(z-a)\,f(z)$ 有限时积分才给出有限值 。

  如果是大圆弧 （半径 $r\to\infty$），积分弧长度趋于 ∞，因此仅当 $\lim_{R\to\infty} f(z)$ 趋于 0， 积分才不发散 。

  因为弧长正比于 R，也就正比于 z，故要在 $\lim_{R\to\infty} z\,f(z)$ 有限时，

  也即弧长与函数值的乘积有限时 ，积分值才有值 。

2.2 Cauchy 公式及其推论

解析函数不是简单的两个二元实变函数，其虚部和实部有一定关系（共轭性），知其一必知其二。还有另一个特殊性质：解析函数各点的函数值不相互独立，特别是，给定边界上的值，则内部各点的值就确定。这就是 Cauchy 公式：由边界值确定内部任一点的函数值。实变函数无此特性。在电磁理论中，若知道边界上电磁场的值，即可知道内部电磁场。

- 目前能容易求出的积分

  1. $I_n = \oint_C (z-a)^n\,dz = 2\,\pi\,i\,\delta_{n,-1}$

  2. 对解析函数 $f(z)$: $\oint_C f(z)\,dz = 0$

  3. 能简单地求出原函数的积分

$\oint_C \frac{dz}{z\sin z} = ?$ 需要更多的定理、公式。

有界单连通区域的Cauchy公式

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{D}$ 上解析， C 为区域边界（分段光滑），则区域内任意一点 a 的函数值

$$f(a) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{z-a},$$ 区域内部的函数值由边界的函数值完全确定

证明：因为函数解析，积分回路可连续变形至 C_r： $z = a + r\,e^{i\theta},\ r\to 0$

令：$g(z) = \dfrac{f(z)}{z-a} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to 0}(z-a)\,g(z) = \lim_{r\to 0} f(z) = f(a) = k$

可对 $g(z)$ 应用 小圆弧引理 $\Longrightarrow \oint_{C_r} g(z)\,dz = i\,2\,\pi\,f(a)$

■ Cauchy 公式成立的条件：

a. 以 C 为边界的单连通区域内， $f(z)$ 解析;

b. 点 a 在区域 D内（是内点，不能是边界点）。

例题

$I = \oint_C \dfrac{e^z}{z^2+1}\,dz, \quad C$ 为 $|z+i| = 1$ 的圆

奇点：$z = \pm i, \quad I = \oint_C \dfrac{e^z/(z-i)}{z+i}\,dz$

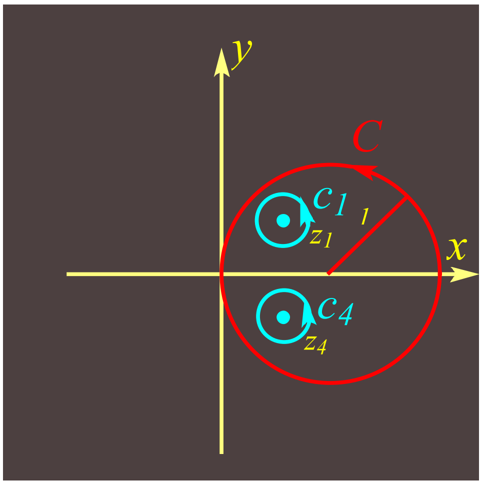
$f(z) = \dfrac{e^z}{z-i}$ 在 C 围成的单连通闭区域解析

$I = 2\,\pi\,i\,f(-i) = -\pi\,e^{-i}$

例题

$I = \oint_C \dfrac{1}{z^4+1}\,dz, \quad C$ 为 $x^2+y^2 = 2\,x$ 的圆

奇点：$f(z) = z^4+1$ 的4个根，$z_k = e^{i\,\pi/4 + i\,k\,\pi/2}, \; k = 0,\,1,\,2,\,3$



C 包围了两个奇点， 构成复连通解析区域

复连通 Cauchy 定理的推论： 沿外境线 逆时针走向 的积分等于沿 所有内镜线 逆时针走向 积分和。

I 化成沿 c_1 和 c_4 的积分

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1} = 1/((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))$

$I_1 = \oint_{c_1} f(z)\,dz = \oint_{c_1} \dfrac{f_1(z)}{z-z_1}\,dz,$

$f_1(z) = \dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ 在 c_1 围成的区域内解析 ， 可应用 Cauchy 公式

$I_1 = 2\,\pi\,i\,f_1(z_1), \quad I = 2\,\pi\,i\,[f_1(z_1) + f_4(z_4)] = -i\,\pi\Big/\sqrt{2}$

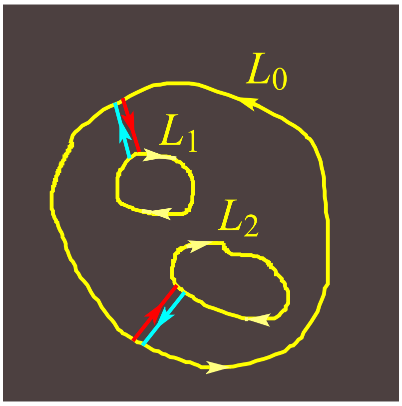
where $f_4(z)=\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$。

有界复连通区域的Cauchy公式

设函数 $f(z)$ 在闭复连通区域 $\overline{D}$ 上解析， C 为区域所有边界的正向，则区域内任意一内点 a 的函数值

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{z-a},\qquad C=L_0+\sum_k L_k \text{ 为所有边界的正向 （外境线逆时针， 内境线顺时针 ）}$$

证明：作割线，视为单连通区域即得。



- 推论，对解析函数 $f(z)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{z-a}=\begin{cases} f(a) & \text{对 } a \text{ 点在回路之内} \\ 0 & \text{对 } a \text{ 点在回路之外}\end{cases},$$

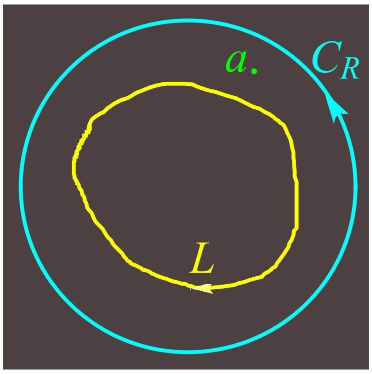
单、复连通区域的Cauchy公式，均要求 $f(z)$ 在一个闭区域解析，C 为区域所有边界的正向。

而函数 $f(z)$ 在一个闭区域 $\overline{D}$ 上解析的定义为：可找到一个包含该闭区域的开区域 E， $f(z)$ 在 E 上解析。

无界区域的Cauchy公式

设函数 $f(z)$ 在闭回路 L 及 L 外部解析， 且 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ (一致趋于 0)， 则对 L 外任意一点 a

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\frac{f(z)\,dz}{z-a},\quad C^- \text{ 为 } L \text{ 顺时针 （仍为边界正向 ）}$$



证明：以 $z=0$ 为中心，做一大圆 C_R 使得 a 和 L 均在 C_R 之内

由复连通区域的Cauchy公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

所以需要证明第二项为 0。可作如下分析：

$R\to\infty$ 时，$f(z)\to 0$，弧 $dz\sim R$，而 $\frac{1}{z-a}\sim\frac{1}{R}$，故第二项应该 $\to 0$

这种情况的严格证明，可利用大圆弧引理。以下证明之。

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}, \qquad z\,g(z) = \frac{z\,f(z)}{z-a},$$

$$\lim_{z\to\infty} z\,g(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{1-\frac{a}{z}} = \lim_{z\to\infty} f(z) = K = 0$$

利用大圆弧引理：$\oint_{C_R}\frac{f(z)\,dz}{z-a} = i\,2\pi K = 0$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

Cauchy公式的推论

■ 解析函数的高阶导数（高阶导数的Cauchy公式）

设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 内解析，则在 G 内，$f(z)$ 可以有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi, \qquad L \text{ 为 } \overline{G} \text{ 的所有边界的正向}。$$

证明：利用数学归纳法。

$n=1$ 时：

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i\,h}\oint_L\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)} - \frac{f(\xi)}{\xi-z}\right]d\xi$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z-h)(\xi-z)} \xrightarrow{\text{是否等于}} \frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^2}$$

还是写成较熟悉的某个积分 $I=0$ 的形式，设二者之差为 I

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\left[\frac{1}{\xi-z-h} - \frac{1}{\xi-z}\right]d\xi, \quad \text{取绝对值}$$

$$|I| \le \frac{|h|}{2\pi}\oint_L\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2}\frac{|d\xi|}{|\xi-z-h|}, \quad \text{注意：} h\to 0$$

$a.$ $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 内解析，故 $|f(\xi)|$ 在边界 L 上必然有界，$|f(\xi)|<M_1$

$b.$ z 为区域 G内确定（不随 h 改变）的内点，ξ 在边界 L 上，$(z-\xi)\neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{|\xi-z|^2}<M_2$ 有界

$c.$ 因为 $h\to 0$，故 $z+h$ 也不在边界 L 上 $\Longrightarrow \frac{1}{|\xi-(z+h)|}<M_3$ 有界

故：$|I| < \frac{|h|}{2\pi}M_1 M_2 M_3\,l$，$l$ 为边界 L 的长度。

$|I| < |h|\,M$，M 有界 $\Longrightarrow \lim_{h\to 0} I = 0$

$n=1$ 情况得证。

$n \geq 2$ 时，用数学归纳法证明 。

因此，一个复变函数只要在某个区域解析，则它必有任意阶导数。

只要解析，由高阶导数的Cauchy公式知， $f'(z) = u_x + i\,v_x = -i\,u_y + v_y$ 也解析

$\Longrightarrow$ 四个偏导数必然连续，

只要解析，则任意阶导函数也解析，四个偏导数必存在且连续。

- 区域解析、Cauchy 定理、Cauchy 公式、任意阶导数之间的关系

（C−R 条件）＋（u, v 连续）$\xLeftrightarrow{\text{充要条件}}$ 解析 $\xRightarrow[\text{格林公式}]{\text{四偏导数连续}}$ Cauchy定理

$\Longrightarrow$ Cauchy公式 $\Longrightarrow$ 任意阶导数 $f^{(n)}(z)$ $\Longrightarrow$ 四偏导数连续

循环论证？ Goursat 在不利用 四偏导数连续 的条件下证明了Cauchy定理 。

- 复变函数在闭区域 $\overline{G}$ 解析，则有任意阶导数，实变函数则不然。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

在闭区间 $|x| \leq 1$ 存在一阶导数，但二阶导数不存在。

在复数域，一阶导数存在，则任意阶导数存在。

退回作为复数子集的实数域，为何一阶导数存在，二阶导数反而可能不存在？

在一个子集里都不成立的命题（一阶可导则任意阶可导），在更大的数集反而成立？佯谬？

实际上，把上述函数定义到复数域，就会发现 $f'(z)$ 在 $z = 0$ 点不存在。

换言之：对复变函数，解析的要求是如此严格，以至于一旦满足一阶导数存在，则任意阶导数也都存在。

对实变函数，因可导的要求较低，未免有混进革命队伍的投机分子，经不起多阶求导的考验。

例题

$$I = \oint_C \frac{dz}{z\,\mathrm{sinz}}, \quad C \text{ 为 } |z| = 1 \text{ 的圆周}$$

$$I = \oint_C \frac{(z/\sin z)}{z^2}\,dz, \quad f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\mathrm{sinz}} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \quad \text{在区域内解析}$$

$$I = \oint_C \frac{(z/\sin z)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i\,\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = 0$$

其中用到了洛必达法则

Morera定理—— Cauchy定理的逆定理

如 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中连续，且对 $\overline{G}$ 内的任意一闭合回路都有

$$\oint f(z)\,dz = 0, \quad \text{则 } f(z) \text{ 在 } G \text{ 内解析。}$$

证明：任意闭合回路积分为 0，故对任意 $z \in G$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \text{ 与路径无关， 故 } F(z) \text{ 为单值函数}$$

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h} [f(\xi) - f(z)]\,d\xi\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)|\,|d\xi| \leq \frac{1}{h}\,\varepsilon\,h$$

即：$F(z)$ 在 G 内解析，由高阶导数的Cauchy公式知 ， $F'(z) = f(z)$ 也必然解析 。

Cauchy不等式

如 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 上解析，则

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{2\pi} \frac{M\,l}{d^{n+1}}$$

M 为 $|f(z)|$ 在闭区域 $\overline{G}$ 上的最大值， l 为边界长度， d 为 z 到边界的最短距离

证明：这是高阶导数的Cauchy公式的直接推论。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

均值定理

定理：$f(z)$ 在解析区内任意一点 a 的函数值 $f(a)$，等于以 a 为圆心，完全于解析区的任意一个圆周上的函数值的平均。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + r\,e^{i\theta}\right) d\theta$$

证明：由Cauchy公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad \text{令 } z = a + r\,e^{i\theta}, \text{ 代入即得。}$$

最大模、最小模定理

定理：$f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 上解析，则 $|f(z)|$ 只能在 $\overline{G}$ 的边界上取最大值。

也即在开区域 G 内，$|f(z)|$ 最多只有鞍点。

证明：由 Cauchy不等式，若 $|f(z)|$ 在边界上的最大值为 M，则

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M\,l}{d} \quad \text{并令：} g(z) = [f(z)]^n \implies f(z) \text{ 解析，} g(z) \text{ 也解析}$$

$$\forall z \in G, \quad |f(z)|^n = |[f(z)]^n| = |g(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M^n\,l}{d}$$

$$|f(z)| \le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/n}, \quad \text{令 } n \to \infty \text{ 即得}$$

$$|f(z)| \le M$$

- 以上证明并不严格，因为 $f(z)$ 解析，并不意味着 $[f(z)]^n$ 在 $n \to \infty$ 时也解析。

严格的证明

若 $|f(z)|$ 存在内点极大值，这些极大中，必有一点使得 $|f(z)|$ 最大

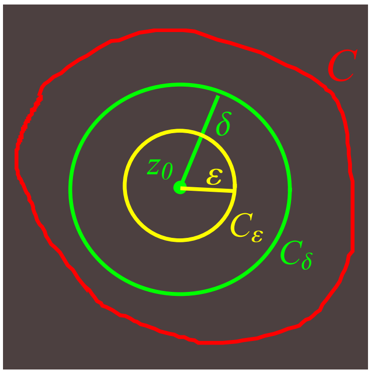
若 $|f(z)|$ 在某一内点 z_0 取最大值，则必可找到一个 δ 邻域 C_δ，

$|z-z_0| \le \delta$（如图绿色圆所示），$\forall z \in C_\delta$，有 $|f(z)| \le |f(z_0)|$

Cauchy公式：取 C_ε 为 $|z-z_0| = \varepsilon \le \delta$，如图绿色圆所示

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\varepsilon}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|}|dz|$$

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$



上式左边 $|f(z_0)|$ 为 $|f(z)|$ 在区域 C_δ 里的极大值，

上式右边为 $|f(z)|$ 在圆周 C_ε 上的平均值，故该式表明：

对圆周 C_ε 上的点 z_ε，$|f(z_\varepsilon)| = |f(z_0)|$。

而圆周半径 ε 可在$0 < \varepsilon \le \delta$ 间变化，故 $|f(z)|$ 在整个 δ 邻域 C_δ 内均等于 $|f(z_0)|$。

对 C_δ 边界上的点 z_δ，$|f(z_\delta)| = |f(z_0)|$。即，$|f(z)|$ 在 C_δ 的边界点 z_δ 取最大值。

对邻域的边界点 z_δ 再次应用上述讨论，可导出：在整个闭区域 $\overline{G}$ 上，均有 $|f(z)| = |f(z_0)|$。

这就是说，一旦 $|f(z)|$ 在某一内点 z_0 取最大值 $|f(z_0)|$，则整个闭区域上，$|f(z)| = |f(z_0)| =$ 常数。

更简明的证明参见 “§3.3 解析函数的Taylor展开”一节的例题。

一般在G 内，$|f(z)| < M$，仅当 $|f(z)| \equiv M$ 时等号才成立，而 $|f(z)| \equiv M$ 意味着 $f(z) = c$（试证之），故仅当 $f(z) = c$ 时等号才成立。

- 如在 $\overline{G}$ 内 $f(z) \ne 0$，则 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 也在 $\overline{G}$内解析，$|g(z)|$ 只能在边界上取最大值，对应地，$|f(z)|$ 只能在边界上取最小值。

Liouville定理

定理：$f(z)$ 在整个复平面（不包括无穷远点）上解析，且当 $z\to\infty$ 时 $|f(z)|$ 有界，则 $f(z) = c$。

证明：利用一阶导数的Cauchy公式

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi,\quad \text{当 } R\to\infty \text{ 时，} |f(z)| < M,$$

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2}|d\xi| \le \frac{M}{2\pi}\frac{2\pi R}{d^2}$$

d 为大圆周到到 z 点的最近距离 $d\sim R$

故取积分圆半径 $R\to\infty$，$|f'(z)| = 0$

$f'(z) = 0 \quad\Longrightarrow f(z) = c$

Cauchy型积分

定理：在一段分段光滑的曲线 L上的连续函数 $\phi(\xi)$所构成的积分

$$F(z) = \int_L\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad \text{（称为 Cauchy 型积分）}$$

Cauchy型积分对曲线 L 外的任意点 z 是解析函数。

证明：需证明 $F'(z)$ 对曲线外的任意点 z 都存在。从导数的定义出发，

$$F'(z)=\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_L\Big[\frac{\phi(\xi)}{\xi-z-h}-\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}\Big]d\xi$$

$h\to 0$，故总可以使 $z+h$ 与 z 都不在曲线 L上

$$F'(z)=\int_L\frac{\phi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z-h)(\xi-z)}=\int_L\frac{\phi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^2}$$

其中最后一步请同学参照高阶的导数Cauchy公式的证明自己完成。

既然 $F(z)$ 解析，它必有高阶导数，

还可证明：$F^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\phi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$

注意此式与高阶导数Cauchy公式之异同。

例题

例题：已知 $\psi(t,q)=e^{2qt-t^2}$，求证

$$\Big[\frac{\partial^n\psi(t,q)}{\partial t^n}\Big]_{t=0}=(-1)^n\,e^{q^2}\,\frac{d^n}{dq^n}e^{-q^2}$$

证明：利用高阶导数的Cauchy公式

将 q 作为参数，$\psi(t,q)$ 视为 t 的复变函数，有

$$\Big[\frac{\partial^n\psi(t,q)}{\partial t^n}\Big]_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{\psi(z,q)}{z^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{2qz-z^2}}{z^{n+1}}dz$$

C 可取为 z 平面内圆心于原点半径为 1 的圆：$|z|=1$

接着，把 e^{2qz-z^2} 的指数部分配方成：$2qz-z^2=-(z-q)^2+q^2$

作复变量代换：$z-q=-w$（思考：为何不设 $z-q=w$？），$dz=-dw$，从而：$e^{2qz-z^2}=e^{q^2}\,e^{-w^2}$

C 映照为：$|z|=1\implies w$ 平面内 C_w：$|w-q|=1$，圆心于 q、半径为 1 的圆。

故：$$\Big[\frac{\partial^n\psi(t,q)}{\partial t^n}\Big]_{t=0}=\frac{n!\,e^{q^2}}{2\pi i}\oint_{C_w}\frac{(-1)^n e^{-w^2}}{(w-q)^{n+1}}dw$$

对蓝色部分再利用一次高阶导数的Cauchy公式

$$\Big[\frac{\partial^n\psi(t,q)}{\partial t^n}\Big]_{t=0}=(-1)^n\,e^{q^2}\Big[\frac{d^n}{dw^n}e^{-w^2}\Big]_{w=q}=(-1)^n\,e^{q^2}\frac{d^n}{dq^n}e^{-q^2}$$

▲ $\Big[\dfrac{\partial^n e^{2xt-t^2}}{\partial t^n}\Big]_{t=0}=H_n(x)$ 称为厄密多项式，Hermite polynomials

满足微分方程：$y''-2xy'+2ny=0$

生成函数：$g(x,t)=e^{2xt-t^2}\xRightarrow{\text{泰勒展开}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n g(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$

$g(x,t)$ 在 $t=0$ 邻域展开，展开系数为：$\dfrac{H_n(x)}{n!}$，故称 $g(x,t)$ 为生成函数

递推关系：$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$，把上展开式带入微分方程即得 。

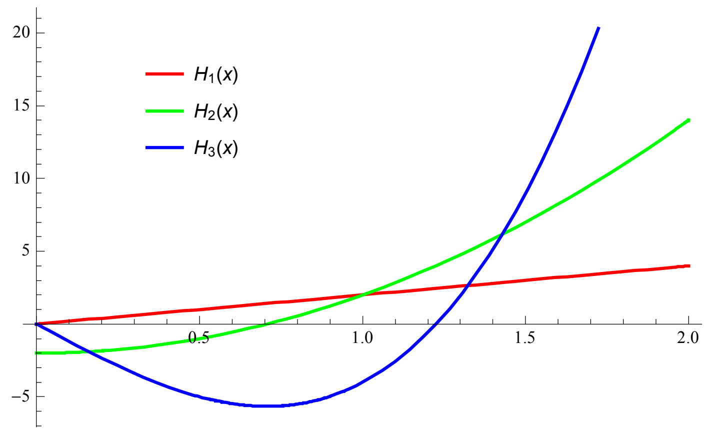
在量子力学解线性谐振子问题终将会用到 。

```
Table[HermiteH[n, x], {n, 0, 5}]
Table[D[e^(2 x t-t^2), {t, n}] /. t → 0, {n, 0, 5}]
D[HermiteH[n, x], {x, 2}] - 2 x D[HermiteH[n, x], {x, 1}] + 2 n HermiteH[n, x] == 0 //
 FullSimplify
Plot[{HermiteH[1, x], HermiteH[2, x], HermiteH[3, x]}, {x, 0, 2},
 PlotStyle → {Red, Green, Blue}, PlotLegends → Placed["Expressions", {0.25, 0.75}]]
```

$\{1,\ 2x,\ -2+4x^2,\ -12x+8x^3,\ 12-48x^2+16x^4,\ 120x-160x^3+32x^5\}$

$\{1,\ 2x,\ -2+4x^2,\ -12x+8x^3,\ 12-48x^2+16x^4,\ 120x-160x^3+32x^5\}$

True

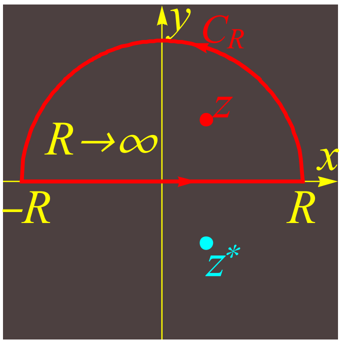


例题：试证明：如果 $f(z)$ 在上半平面解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ 在 $0\le\arg z\le\pi$ 一致成立，则 $f(z)$ 在上半平面的值完全由其实轴上的实部或虚部值确定。

说明：对解析函数，由 C-R 条件（共轭性质），人们可以由实部确定虚部（或反之），

由 Cauchy定理，人们可以由边界值确定内部值 ，

本题说明：在一定条件下 ，只要知道边界上的 实部或虚部 ，就可确定内部的函数值 。



证明：由Cauchy公式，对复平面上的两个点 z, z^* （其中 z^* 为 z 的复共轭）有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad C\text{ 为上图红色路径 （实轴和圆心于原点半径 } R \text{ 的上半圆周构成的回路 ）} \tag{1.2}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z^*}d\xi,\quad \text{因为回路内被积函数解析} \tag{1.3}$$

两式相减： $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\left[\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z^*}\right]d\xi$， 令： $z=x+iy,\ z^*=x-iy$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\,2\,i\,y}{(\xi-z)(\xi-z^*)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}((f(\xi)\,2\,i\,y)/((\xi-z)(\xi-z^*)))\,d\xi=\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R}(f(\xi)/((\xi-z)(\xi-z^*)))\,d\xi \tag{1.4}$$

其中利用了 大圆弧引理： $\int_{C_R}=0$

(1.4) 式分别求实部和虚部， $\xi=\zeta+i\eta$， 在实轴上： $\xi=\zeta$， $(\xi-z)(\xi-z^*)=[(\zeta-x)-iy][(\zeta-x)+iy]$

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\zeta,0)\,d\zeta}{(\zeta-x)^2+y^2}$$

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\zeta,0)\,d\zeta}{(\zeta-x)^2+y^2}$$

实轴上的实部 （虚部） 确定了上半平面的实部 （虚部）

(1.2) 与 (1.3) 之和

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\left[\frac{1}{\xi-z}+\frac{1}{\xi-z^*}\right]d\xi$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)(2\xi-2x)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{f(\zeta)(2\zeta-2x)}{(\zeta-x)^2+y^2}d\xi$$

分别求实部和虚部， $\xi=\zeta+i\eta$

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\zeta,0)(\zeta-x)\,d\zeta}{(\zeta-x)^2+y^2}$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\zeta,0)(\zeta-x)\,d\zeta}{(\zeta-x)^2+y^2}$$

实轴上的实部 （虚部） 确定了上半平面的虚部 （实部）

例题：试证明：对解析函数，圆周上的实部就确定了圆内的实部。

证明：由Cauchy公式，对复平面上的两个点 $z,\ z'=a^2\,e^{i\arg z}/|z|$ 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_a}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad z=r\,e^{i\phi},\quad \xi=a\,e^{i\theta} \tag{1.5}$$

$$f\left(r\,e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a\,e^{i\theta}\right)a\,e^{i\theta}\,d\theta}{a\,e^{i\theta}-r\,e^{i\phi}} \tag{1.6}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_a}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi \tag{1.7}$$

因为 z' 为圆外的点， 被积函数在 C_a 内解析

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(a\,e^{i\theta}\right)a\,e^{i\theta}\,d\theta\right)/\left(a\,e^{i\theta}-\left(a^2/r\right)e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(a\,e^{i\theta}\right)r\,e^{i\theta}\,d\theta\right)/\left(r\,e^{i\theta}-a\,e^{i\phi}\right) \tag{1.8}$$

(1.6) − (1.8)

$$f\left(r\,e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a\,e^{i\theta}\right)\left[\frac{a\,e^{i\theta}\,d\theta}{a\,e^{i\theta}-r\,e^{i\phi}}-\frac{r\,e^{i\theta}\,d\theta}{r\,e^{i\theta}-a\,e^{i\phi}}\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)}{a^2+r^2-2\,r\,a\cos(\theta-\phi)}f\left(a\,e^{i\theta}\right)d\theta$$

圆周上的实部 （虚部） 确定了圆内的实部 （虚部）

```
tst = a e^(i θ)/(a e^(i θ) - r e^(i ϕ)) - r e^(i θ)/(r e^(i θ) - a e^(i ϕ));
Simplify[ComplexExpand[Re[tst]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[tst]]]
```

```
(a^2 - r^2) / (a^2 + r^2 - 2 a r Cos[θ - ϕ])
```

```
0
```

- 把上半平面的函数值表为实轴函数值的积分形式称为上半平面的泊松公式
- 把圆内的函数值表为圆周函数值的积分形式称为圆内区域的泊松公式

例题：

$$I = \oint \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \oint \left(z^2 + 1\right)^{2n} \frac{dz}{z^{2n+1}}$$

解：利用高阶导数Cauchy公式： $I = \frac{2\pi i}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$

$$f(z) = \left(z^2 + 1\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} \left(z^2\right)^k$$

$$f^{(2n)}(0) = C_n^{2n} (2n)! = \left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2$$

例题：计算

$$I = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx, \quad \text{其中 } a > 0$$

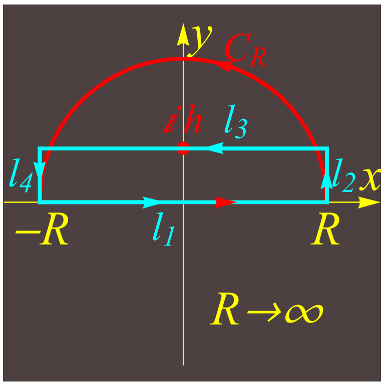
解：不妨设 $b > 0$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{ibx} \, dx = \frac{1}{2} I'$$

e^{ibz} 形式诱使利用 Jordan 引理，增添下图所示红色路径 C_R，$f(z) = e^{-az^2} e^{ibz}$

引理条件是在上半平面，满足：$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

但当 z 沿虚轴趋于无穷时，$f(z) = e^{-az^2}$ 不趋于0，不满足引理的条件。



选如上图蓝色路径，$f(z) = e^{-az^2} e^{ibz}$

$$I' = \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{ibx} \, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{l_1} f(z) \, dz, \quad \text{其中 } l_1 \text{ 为沿实轴从 } -R \text{ 到 } R$$

因为 $f(z)$ 解析，$\int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{l_3}+\int_{l_4}=0 \implies \int_{l_1}=-\left[\int_{l_2}+\int_{l_3}+\int_{l_4}\right]$

l_2：$z=R+i\,y$，$dz=i\,dy$，$R\to\infty$ 时

$$\int_{l_2} e^{-a z^2}\, e^{i b z}\, dz = i\int_0^h e^{-a R^2-2 i a y+a y^2+i b R-b y}\, dy=0$$

同理：$\int_{l_4} f(z)\,dz=0 \implies \int_{l_1} f(z)\,dz=-\int_{l_3} f(z)\,dz$

l_3：$z=x+i\,h$，x 从 R 到 $-R$

$$I_3=\int_{l_3} e^{-a z^2}\, e^{i b z}\, dz=\int_{-R}^{R} e^{-a(x^2+2 i h x-h^2)+i b x-b h}\, dx$$

$$=\int_{-R}^{R} e^{-a(x^2-h^2)-b h+i x(b-2 h a)}\, dx$$

选取适当的 h，使得指数上虚部等于 0，$h=\dfrac{b}{2a}$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2+a h^2-b h}\, dx=e^{a h^2-b h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2}\, dx$$

$$=e^{a h^2-b h}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$，其中利用了：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2}\, dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

- 试由此推出：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\beta)^2}\, dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$ β 可以是任意复常数 。

```
Integrate[Exp[-a (x - b)^2], {x, -∞, ∞}, Assumptions → a > 0]
Integrate[Exp[-a (x - b)^2] /. b → 2 + 3 ⅈ, {x, -∞, ∞}, Assumptions → a > 0]
```

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$