第三章　函数

- 3.1　函数的基本概念
- 3.2　逆函数与复合函数
- 3.3　集合的特征函数

前言

- 函数回顾

中学期间所学的函数

函数特点：自变量和应变量

- 函数类型

3.1 函数的基本概念

- 一　函数及其术语的定义
- 定义3.1（函数）

设A和B是两个任意集合，f是从A到B的二元关系。若f具有性质：

（1）f的定义域$Dom\ f=A$;

（2）如果(a, b)，$(a, b')\in f$，则$b=b'$。

则称关系f是从A到B的函数，记为$f:A\longrightarrow B$，或$A\longrightarrow B$。称b为a的象，a为b的原象，记为$b=f(a)$。f的值域记为R_f。又称f为从A到B的映射。

3.1　函数的基本概念

- 函数：一种特殊的关系

　　函数⊂关系

　　函数≠关系

　　给出关系，根据函数定义判定是否是函数。

3.1 函数的基本概念

- 例：设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c\}$，从A到B的关系:
- $R_1=\{(1,a), (2,b), (3,c)\}$,
- $R_2=\{(1,a), (1,b), (2,b), (3,c), (4,c)\}$,
- $R_3=\{(1,a), (2,b), (3,b), (4,a)\}$
- $D_{R1}=\{1,2,3\}\neq A$, 不是函数。
- $D_{R2}=\{1,2,3,4\}=A$，但$(1,a),(1,b)\in R_2$，故不是函数。
- R_3是函数，满足函数的定义。

- 例：设$A=\{\varnothing, a, \{a\}\}$，定义$f:A\times A\to P(A)$如下：$f(x, y)=\{\{x\}, \{x,y\}\}$
- 判断下列各式是否成立：
- 1) $f(\varnothing, \varnothing)=\{\{\varnothing\}\}$
- 2) $f(\varnothing, \varnothing)=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- 3) $f(a, \{a\})=\{\{a\}\}$
- 4) $f(a, \{a\})=\{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

- *<u>西安交通大学**1996**年考研</u>*

- $f(\varnothing, \varnothing)=\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \varnothing\}\}=\{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}=\{\{\varnothing\}\}$
- 所以1)成立，2)不成立；
- $f(a, \{a\})=\{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
- 所以3)不成立，4)成立；

3.1　函数的基本概念

- 定义3.2　（象，原象）

设函数f：$A \longrightarrow B$，$X \subseteq A$，$Y \subseteq B$，定义：

$$f(X)=\{f(a)|a \in X\}$$

称$f(X)$是在f下X的象。

$$f^{-1}(Y)=\{a \in A|\ f(a) \in Y\}$$

称$f^{-1}(Y)$是在f下Y的原象。

- 例3.3　/*象，原象的概念*/
- 设A={1, 2, 3}, B={a, b, c, d}, g={(1, a), (2, c), (3, c)}从A到B的一个函数。S={1}，T={1, 3}，U={a}，V={a, c}。
- g(S)={a}，g(T)={a, c}
- g^{-1}(U)={1}，g^{-1}(V)={1, 2, 3}

3.1　函数的基本概念

- 二　　满射、内射、双射
- 定义3.3（满射、内射、双射）

（1）设f：$A \longrightarrow B$，若$R_f=B$，则称f为满射（到上的）。

（2）设f：$A \longrightarrow B$，若a_1，$a_2 \in A$，　$a_1 \neq a_2$有$f(a_1) \neq f(a_2)$，则称f为内射（一对一的）。

（3）设f：$A \longrightarrow B$，若f是满射且是内射，则称f为双射（一一对应的）。

- 例3.4 /* 判断满射、内射、双射 */
- 设A={a, b, c, d}, B={1, 2, 3, 4}，f是从A到B的函数。
- (1)f={(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 2)}
- (2)f={(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2)}
- 问f是满射还是内射？

- 例：指出下列函数是否为满射、内射和双射，并说明理由。然后根据要求进行计算，其中N为自然数集合。
- 1）$f:N\times N\to N$，$f((x, y))=x+y+1$, 计算$f(N\times\{1\})$。
- 2） $f:N\to N\times N$，$f(x)=(x, x+1)$，计算$f\{0, 1, 2\}$。
- ***<u>北京大学1993年考研</u>***

- 解：1）
- 因为$0 \in N$，但是找不出这样的$(x, y) \in N \times N$，使得$f((x, y))=0$；所以f不是满射；
- 因为$f((1, 2))=f((2, 1))=1+2+1=4$，所以$f$不是内射；
- $f(N \times \{1\})=\{x \mid x \in N 且 x \geq 2\}$。

- 解：2）
- 因为$(1, 1) \in N \times N$，但找不出这样的$x \in N$，使得$f(x)=(1, 1)$，所以f不是满射；
- 对任意的$x, y \in N$，$f(x)=(x, x+1), f(y)=(y, y+1)$, 如果$f(x)=f(y)$, 则$(x, x+1)=(y, y+1)$, 即得$x=y$。所以$f$是内射。
- $f\{0, 1, 2\}=\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

- 例：设双射f：$A \longrightarrow B$，试构造从$P(A)$到$P(B)$的一个双射，并证明之。

- *武汉大学1997年考研*

- 解：构造函数$g: P(A) \to P(B)$, $\forall x \in P(A)$，令$g(x)=y$，满足$\forall a \in x$，都有$f(a) \in y$，且对于$\forall b \in y$，$f^{1}(b) \in x$，即y为仅由x中各元素在f作用下的象组成的集合。
- 证明$g: P(A) \to P(B)$是双射。

3.1 函数的基本概念

- 三、不同函数的个数
- 1 集合A到集合B可以定义多少个不同的函数?
- (1) 集合A到集合B的二元关系个数
- /* 集合A到集合B的二元关系是集合$A\times B$的子集，因此应考察$A\times B$有多少个不同的子集，也就是考察$A\times B$的幂集的元素个数。*/
- 因为$|A\times B|=|B|\times|A|$，故$|P(A\times B)|=2^{|A||B|}$，因此集合$A$到集合$B$的二元关系个数是$2^{|A||B|}$

3.1 函数的基本概念

- (2) A上的二元关系个数有多少个？
- 设|A|=n，则A上的二元关系个数有2^{n^2}
- A上有多少个自反关系？
- $A=\{a_1,a_2,\ldots, a_n\}$
- $A\times A=?$
- 用矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_n) \end{bmatrix}$$

3.1 函数的基本概念

- 自反关系一定包含$\{(a_1,a_1), (a_2,a_2), \ldots, (a_n,a_n)\}$,
- 余下的共有n^2-n个元素，可组成2^{n^2-n}个不同的关系。
- 故不同的自反关系有2^{n^2-n}个。

3.1 函数的基本概念

- 2. 集合A到集合B的不同函数个数
- /*根据函数定义，$A\times B$的子集不一定是A到B的函数。*/
- 设$|A|=m,|B|=n$, 因为对A中m个元素的任一个元素a，可在B的n个元素中任取一个元素作为a的象, 因此A到B的函数有n^m个。

3.1 函数的基本概念

- 3. 例：令$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，问
- 1）有多少不同的由X到Y的关系？
- 2）有多少不同的由X到Y的函数？
- 3）有多少不同的由X到Y的内射和双射？
- <u>*中国科学院计算所1999年考研*</u>

3.1 函数的基本概念

- 1) 不同的X到Y的关系数$|P(X\times Y)|=2^{mn}$.
- 2) n^m.
- 3)
- 在有限集中,只有n=m才存在X到Y的双射,且个数为$m!$,否则不存在双射.
- 若$m=n$,则内射个数为$m!$,
- 若$m>n$,则内射个数为0,
- 若$m<n$,从Y中任取m个元素有C_n^m种方法,此m个元素与X中m个元素间有$m!$种不同的双射,所以内射个数为$m!C_n^m$.

3.2 逆函数与复合函数

- 一　逆函数
- 定义3.4 (逆函数)

设f：A⟶B是双射，f的逆关系称为f的逆函数，记为f^{-1}：B⟶A。

$f(a)=b$，$f^{-1}(b)=a$

- 定理3.1

设f：A$\longrightarrow$B是双射，则设f^{-1}：B$\longrightarrow$A也是双射。

证明方法：根据双射、满射和内射的定义进行证明：

（1）证明满射；（2）证明内射。

直接推导

- 证明：由定义知：f^{-1}是f的逆函数。
- ***<u>先证明f^{-1}是满射</u>***：设f={(a, b) | a∈A, b∈B, f(a)=b }, f^{-1} ={(b, a) | (a, b)∈f }。因为对于每一个a∈A，必有b使(a, b)∈f，从而对每一个a∈A使(b, a)∈f^{-1}，即$f^{-1}(b)=a$，所以f^{-1} : B⟶A是满射。
- ***<u>再证明f^{-1}是内射</u>***：因为若$f^{-1}(b_1)=a$，$f^{-1}(b_2)=a$，则$f(a)=b_1$，$f(a)=b_2$。又f：A⟶B是函数，便有$b_1=b_2$。所以f^{-1} : B⟶A是内射。

- 定理3.2

  设f：$A \longrightarrow B$是双射，则$(f^{-1})^{-1}=f$。

证明两个函数f和g相等的方法：对于定义域A中任意元素a，证明f(a)=g(a)。

3.2 逆函数与复合函数

- 二　复合函数
- 定义3.5（复合函数）

　　设$g: A \longrightarrow B$, $f: B \longrightarrow C$，定义复合函数$f \circ g$为：$f \circ g = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$，且存在$b \in B$，使$b = g(a), c = f(b)\}$，称$f \circ g$是从A到C的复合函数，记为$f \circ g : A \longrightarrow C$。

　对$a \in A$, $(f \circ g)(a) = f(g(a))$。

- 先后次序

3.2 逆函数与复合函数

- 注意：这里采用复合函数习惯记法,目的是为了将变元放在函数记号的右侧，使$(f\circ g)(a)= f(g(a))$,所以用记号$(f\circ g)$，而不用$g\circ f$。
- 例：A={1,2,3}, f、g是集合A到A的函数。
- $g=\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$， $f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
- $(f\circ g)=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
- $g\circ f=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
- 一般$f\circ g\neq g\circ f$

- 定理：设函数g:A→B,f:B→C,则A到C的复合关系$g \circ f$是A到C的函数。
- 证明：先证明对A中任一元素,都有C中元素与之对应,然后证明对A中每个元素,都只对应C中一个元素
- (1)对A中任一元素a,都有C中元素与之对应
- 对任意a∈A，因为g是A到B的函数，所以存在b∈B，使得(a,b)∈g,
- 又因为f是B到C的函数，所以对于b，存在c∈C，使得(b,c)∈ f,
- 根据关系复合的概念得(a,c)∈$g \circ f$

- (2)对A中每个元素,都只对应C中一个元素
- 即证明对A中元素a，若有$x,y\in C$，使得$(a,x)\in g\circ f$, $(a,y)\in g\circ f$，必有x=y。
- 因为$(a,x)\in g\circ f$，根据复合关系概念，存在$b_1\in B$，使得$(a,b_1)\in g$，$(b_1,x)\in f$,
- 同样由于$(a,y)\in g\circ f$，根据复合关系概念，存在$b_2\in B$，使得$(a,b_2)\in g$，$(b_2,y)\in f$,
- 现在有$b_1,b_2\in B$，而$(a,b_1)\in g$，$(a,b_2)\in g$,
- 因为g是函数，所以$b_1=b_2$,
- 现在是存在$x,y\in C$，$(b_1,x)\in f$，$(b_1,y)\in f$,
- 而f也是函数，所以有x=y。
- 因此$g\circ f$是函数。

3.2 逆函数与复合函数

- 定理 3.3

  设g：A⟶B，f：B⟶C，h：C⟶D，则(h o f) o g= h o (f o g)。
- 证明：由我们前面证明的定理可以知道：
- $(h\circ f)\circ g$和$h\circ(f\circ g)$都是A到D的函数。对任意的a∈A，存在b∈B，使得g(a)=b，又对于b，存在c∈C，使得f(b)=c，对于c，存在d∈D，使得h(c)=d，有$(h\circ f)\circ g(a)=(h\circ f)(g(a))=(h\circ f)(b)=h(f(b))=h(c)$=d，同样我们有$h\circ(f\circ g)(a)=h(f\circ g(a))=h(f(g(a)))=h(f(b))=h(c)$=d，由a的任意性得$(h\circ f)\circ g=h\circ(f\circ g)$

3.2 逆函数与复合函数

- 定理3.4

设$g: A \longrightarrow B$, $f: B \longrightarrow C$, $f\circ g$: $A \longrightarrow C$，则

(1) 若f和g是满射，则$f\circ g$是满射。

(2) 若f和g是内射，则$f\circ g$是内射。

(3) 若f和g是双射，则$f\circ g$是双射。

- 证明：(1)要证明$f\circ g$满射，就是证明对C中每个元素都有A中元素与之对应。
- 对任意$c \in C$，因为f是满射,所以存在$b \in B$，使得$f(b)=c$。
- 又因为g是满射，所以存在$a \in A$，使得$g(a)=b$,
- $f\circ g(a)= f(g(a))= f(b)=c$,
- 所以$f\circ g$是满射。

- (2)所谓内射就是要证明当$a\neq b$时，$f\circ g(a)\neq f\circ g(b)$
- 对任意$a,b\in A$,若$a\neq b$，则因为g是内射,所以$g(a)\neq g(b)$。
- *又因为*f是内射,所以当$g(a)\neq g(b)$时，有$f(g(a))\neq f(g(b))$,
- 即$f\circ g(a)\neq f\circ g(b)$，所以$f\circ g$是内射。

- (3)因为f和g是双射,所以f和g当然满射,则由(1)知$f\circ g$是满射。
- f和g也是内射，则由(2)可得$f\circ g$内射，
- 所以$f\circ g$是双射。

- 例：设*f, g, h*是*I*到*I*的函数，$f(x)=3x$, $g(x)=3x+1$，$h(x)=3x+2$，*I*是整数集，求函数的复合$f\circ g$，$g\circ h$，$f\circ g\circ h$。

- 根据复合函数的定义: $f\circ g(x)=f(g(x))$,
- *上海大学1998年考研*

- 解：
- $f \circ g(x)=f(g(x))=3(3x+1)=9x+3$
- $g \circ h(x)=g(h(x))=3(3x+2)+1=9x+7$
- $f \circ g \circ h(x)=f(g(h(x)))=f(3(3x+2)+1)=3(3(3x+2)+1)=27x+21$

3.2 逆函数与复合函数

- 三 恒等函数
- 定义3.6（恒等函数）

设f：$A \longrightarrow A$，若对所有$a \in A$，有$f(a)=a$，则称f为A上的恒等函数，记为I_A。

- 定理3.5

  设f：$A \longrightarrow B$是任意一个函数，则

  $$I_B \circ f = f \circ I_A = f$$

- 证明

- /*证明函数f和g相等:∀a∈A, f(a)=g(a)*/

3.2 逆函数与复合函数

- 定理3.6

  若函数f：$A \longrightarrow B$存在逆函数f^{-1}，则

  $$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

- 定理3.7

设$g: A \longrightarrow B$, $f: B \longrightarrow C$都是双射，则

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

- 证明：由假设和定理3.4可知，$f \circ g$是双射。又由定理3.1可知，g^{-1}和f^{-1}是双射。所以$g^{-1} \circ f^{-1}$是双射，并且$(f \circ g)^{-1}$也是双射。下面证明$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。
- 对任意$c \in C$，且$f^{-1}(c)=b$，$g^{-1}(b)=a$于是$(g^{-1} \circ f^{-1})(c)= g^{-1}(f^{-1}(c))= g^{-1}(b)=a$，$(f \circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=c$.
- 由上式知$(f \circ g)^{-1}(c)=a$, 由于c的任意性, 所以$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

- 定义：设函数f、g:A→B,若对任意a∈A,有f(a)=g(a)，则称函数f和g相等，记为f=g。
- 例：在实数范围内，f(x)=x+1,g(x)=x(x+1)/x
- 对x=0,f(0)=1,
- 而g在0处没有定义。
- 所以f≠g.
- 因此两个函数是否相等必须考察它们的定义域是否相同。

- 设f：$A \longrightarrow B$是一个映射，记f^{-1}是f的逆关系，$f \circ g$是f、g的复合关系。证明：
- 1）当且仅当$f^{-1} \circ f = I_B$时，f是满射。
- 2）当且仅当$f \circ f^{-1} = I_A$时，f是内射。
- */*上海交通大学1999考研*/*

- 解：关系复合与函数复合的联系和区别

3.3 集合的特征函数

- 1. 定义3.7（特征函数）

　　设U是全集，且$A \subseteq U$，函数ψ_A: $U \longrightarrow \{0, 1\}$定义为：

$\psi_A(x)=1$，若$x \in A$；

$\psi_A(x)=0$，若$x \notin A$。

- 例3.5 设U是某大学的全体学生组成的集合，A是女大学生集合，特征函数ψ_A的值为1对应女大学生，0对应于男大学生。

- 2. 定理3.8
- 设A和B是全集U的子集，对于所有$x \in U$，下列各式成立：

(1) $\psi_A(x)=0 \Leftrightarrow A=\varnothing$;

(2) $\psi_A(x)=1 \Leftrightarrow A=U$;

(3) $\psi_A(x)\le\psi_B(x) \Leftrightarrow A\subseteq B$;

(4) $\psi_A(x)=\psi_B(x) \Leftrightarrow A=B$;

(5) $\psi_{A\cap B}(x) = \psi_A(x) * \psi_B(x)$;

(6) $\psi_{A\cup B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_{A\cap B}(x)$;

(7) $\psi_{\bar{A}}(x) = 1 - \psi_A(x)$;

(8) $\psi_{A-B}(x) = \psi_{A\cap\bar{B}}(x) = \psi_A(x) - \psi_{A\cap B}(x)$

- 证明：

(5) 因为$x \in A \cap B$即$x \in A$且$x \in B$，所以$\psi_A(x)=1$，$\psi_B(x)=1$，于是有$\psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x) * \psi_B(x)=1$.

如果$x \notin A \cap B$，则$\psi_{A \cap B}(x)=0$，于是$\psi_A(x)=0$或$\psi_B(x)=0$，$\psi_{A \cap B}(x)= \psi_A(x) * \psi_B(x)=0$。

- 3. 利用集合的特征函数证明集合恒等式
- 例3.7

证明$\overline{\overline{A}}=A$

证明：$\psi_{\overline{\overline{A}}}(x)=1-\psi_{\overline{A}}(x)=1-(1-\psi_A(x))=\psi_A(x)$

- 例3.8
- 证明A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)
- 证明: $\psi_{A\cap(B\cup C)}(x)=\psi_A(x) * \psi_{B\cup C}(x)$

$= \psi_A(x) * (\psi_B(x)+ \psi_C(x)- \psi_{B\cap C}(x))$

$= \psi_A(x) * \psi_B(x)+ \psi_A(x) * \psi_C(x)-\psi_A(x) * \psi_{B\cap C}(x)$

$= \psi_{A\cap B}(x)+\psi_{A\cap C}(x) -\psi_{A\cap B\cap C}(x)$

$= \psi_{A\cap B}(x)+\psi_{A\cap C}(x) -\psi_{(A\cap B)\cap(A\cap C)}(x)$

$= \psi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

形式化证明

- 1. 演绎证明
- 演绎证明包含命题序列，其正确性导致从某个初始命题（称为前提或已知命题）得出“结论”命题。证明的每一步都必须根据某条公认的逻辑原理，利用已知的事实或演绎证明中前面的一些命题，或者利用这两者的组合。

- 2. 定理形式
- 1) “如果-则” 的方式: “如果H，则C。”
- 如果前提H对给定的参数值为真，则结论C对同样的值为真。
- 其他形式: H蕴涵C; H仅当C; C当H; 只要H为真，就得出C.

- 2) 当且仅当命题:
- A当且仅当B, A iff B, A等价于B，A恰好当B
- 两个“如果-则”命题：如果A，则B；如果B，则A。

命题

- 命题：如果H，则C
- 逆否命题：如果非C，则非H
- 一个命题与其逆否命题同时为真或同时为假

- 命题：如果H，则C
- 逆命题：如果C，则H
- 逆命题与原命题不等价

习题解析

- 一、计算题
- 1)设S={a, b, c}，T={p, q}， f: S⟶T，问有多少函数f，其中有多少满射。
- |S|=3, |T|=2, f: S⟶T，共有函数为2^3=8个，其中满射为2× C_3^2 =6个。

- 2)以下哪些是函数，哪些是入射函数，哪些是满射函数，如果是双射，写出它的逆函数：
- A) $f: Z \longrightarrow N$, $f(x)=x^2+1$
- B) $g: N \longrightarrow Q$, $g(x)=1/x$
- C) $h: Z\times N \longrightarrow Q$, $h(Z, n)=Z/(n+1)$
- D) $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{p, q, r\}$, $f=\{(1, q), (2, r), (3, p)\}$
- E) $g: N \longrightarrow N$, $g(x)=2^x$
- F) $h: R^2 \longrightarrow R^2$, $h(x, y)=(y+1, x+1)$ R^2

- A) 函数
- B) 不是函数，在$x=0$无定义
- C) 函数，满射
- D) 函数，双射，$f^{-1}: \{p, q, r\}\to\{1, 2, 3\}$，这里$f^{-1}=\{(q, 1), (r, 2), (p, 3)\}$
- E) 函数，内射
- F) 函数，双射，$h^{-1}: R^2\to R^2$，这里$h^{-1}(x, y)=(y-1, x-1)$.

- 3)设g: A⟶B, f: B⟶C，定义复合函数f∘g: A⟶C，给出A, B和f, g；使得
- A) f∘g: A⟶C是满射的，但g不是满射的；
- A={1, 2, 3, 4}, B={a, b, c, d}, C={5, 6, 7}, g={(1, a), (2, b), (3, c), (4, a)}, f={(a, 5), (b, 6), (c, 7), (d, 7)}, 则 f∘g: A⟶C是满射的，但g不是满射的。

- B) f ∘ g: A⟶C是内射的，但f不是内射的；
- A={1, 2, 3}, B={a, b, c, d}, C={5, 6, 7, 8}, g={(1, a), (2, b), (3, c)}, f={(a, 5), (b, 6), (c, 7), (d, 7)}, 则f ∘ g: A⟶C是内射的，但f不是内射的；

- C) $f \circ g: A \longrightarrow C$是双射的；
- $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c, d\}$, $C=\{5, 6, 7\}$, $g=\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, $f=\{(a, 5), (b, 6), (c, 7), (d, 7)\}$, 则$f \circ g: A \longrightarrow C$是双射的；

计算题总结

- 在概念明确的基础上解题

- 二、证明题
- 1）设$g: A \longrightarrow B$, $f: B \longrightarrow C$，定义复合函数$f \circ g: A \longrightarrow C$，已知$f \circ g$是内射的， g是满射的，证明f是内射的。
- 证明：反证法。假设f不是内射的，即存在$b_1, b_2 \in B$，$b_1 \neq b_2$, $g(b_1)=g(b_2)=c$。因为g是满射的，所以存在$a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $g(a_1)=b_1$, $g(a_2)=b_2$. 则$f \circ g(a_1)=f \circ g(a_2)$. 所以$f \circ g$不是内射的，导致矛盾。

- 2）设g: A⟶B, f: B⟶C，定义复合函数 $f\circ g$: A⟶C，已知$f\circ g$是满射的，f是内射的，证明g是满射的。
- 证明：反证法。假设g不是满射的，则存在b∈B，不存在a∈A，使得g(a)=b。因为f是内射的，所以存在c∈C, 使得f(b)=c，而且不存在其他的b'∈B, 使得f(b')=c。因为$f\circ g$是满射的，所以存在a'∈A，$f\circ g$(a')=c, 则存在g(a')∈B，使得f(g(a'))=c。则导致矛盾。所以g是满射的。

- 3）设$f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$，定义复合函数$f \circ g=I_X$, $g \circ f=I_Y$，证明f与g是双射的，并且$g=f^{-1}$。
- 证明由学生完成。

证明方法

- （1）根据定义给出的性质进行证明：
- 证明函数是满射、内射和双射，即证明满足满射、内射和双射要满足的条件；
- （2）证明两个函数f与g相等
- 对任意$a \in A$, 证明$f(a)=g(a)$.

- 3.21 设函数f: A⟶B, 且X和Y是A的子集。证明：
- （1）$f(X \cup Y)=f(X) \cup f(Y)$
- 基本法证明两个集合相等：

- （2）$f(X\cap Y)\subseteq f(X)\cap f(Y)$
- 基本法证明

是非判断

- 3.16 设函数g: A⟶B, f: B⟶C，判断下列命题的真假，并说明理由。
- (1) 若f是内射，则f∘g是内射；
- 假
- A={1, 2, 3}, B={a, b, c}, C={4, 5, 6, 7},

f(a)=4, f(b)=5, f(c)=6, g(1)=a, g(2)=b, g(3)=a,

则f∘g(1)=4, f∘g(2)=5, f∘g(3)=4.

所以f∘g不是内射。

- (2) 若f是满射，则f ∘ g是满射；
- 假
- A={1, 2, 3}, B={a, b, c, d}, C={4, 5, 6},

f(a)=4, f(b)=5, f(c)=6, f(d)=5, g(1)=a, g(2)=b, g(3)=d,

则f ∘ g(1)=4, f ∘ g(2)=5, f ∘ g(3)=5.

所以f ∘ g不是满射。

- (3) 若$f \circ g$是内射，则f是内射；
- 假
- $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c, d\}$, $C=\{4, 5, 6\}$,

$f(a)=4$, $f(b)=5$, $f(c)=6$, $f(d)=5$, $g(1)=a$, $g(2)=b$, $g(3)=c$,

则$f \circ g(1)=4$, $f \circ g(2)=5$, $f \circ g(3)=6$.

所以f不是内射。

- (4) 若$f\circ g$是内射，则g是内射；
- 真。
- 反证法证明，假设g不是内射, 即存在$a_1, a_2\in A$，$a_1\neq a_2$, $g(a_1)=g(a_2)$。则$f(g(a_1))= f(g(a_2))$, 则$f\circ g$不是内射， 导致矛盾。
- 所以命题为真。

- (5) 若$f \circ g$是满射，则f是满射；
- 真。
- 反证法证明，假设f不是满射, 即存在$c \in C$, 不存在$b \in B$，使得$f(b)=c$。因为$f \circ g$是满射，所以存在$a \in A$，使得$f \circ g(a)=c$，即$f(g(a))=c$。所以存在$g(a) \in B$，使得$f(g(a))=c$，导致矛盾。所以f是满射。

- (6) 若$f\circ g$是双射，则f是满射，g是内射；
- 真。
- 由(4), (5)证明导出。

作业

- 3.1, 3.2, 3.5, 3.7, 3.8, 3.12, 3.16, 3.17, 3.21, 3.22