力学基础知识体系的现有学习、研究与教学体会*

谢锡麟

（复旦大学力学与工程科学系　上海　200433）

摘　要：本文将力学基础知识体系分为数学及力学二类，数学基础知识体系主要为微积分，力学基础知识体系主要为张量分析及有限变形理论。首先，阐述了我们对数学的基本认识。其次，阐述了我们对张量分析及有限变形理论的基本认识，包括映照观点，几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论。然后，叙述了我们对张量分析及有限变形理论知识体系的基本构建，以及教学研究及实践上的一些体会。

关键词：微积分；张量分析；有限变形理论

1 对数学的认识

1.1 数学的作用

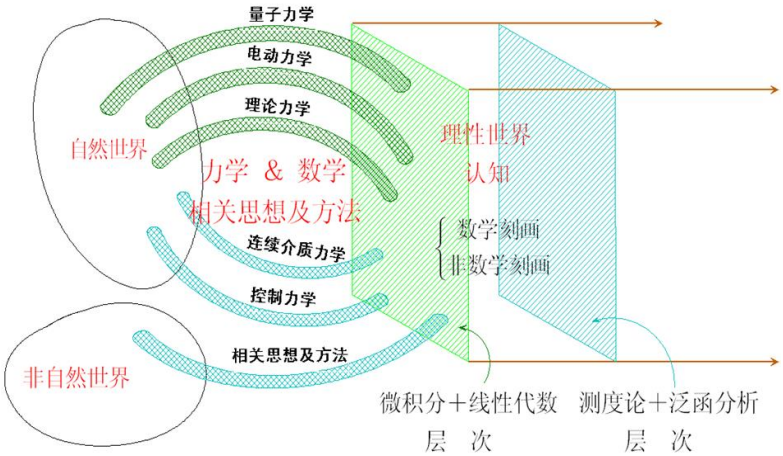


图 1 力学与数学知识体系

数学的学科属性一直是讨论的议题。我国老一辈科学家谈镐生先生认为“按照近代观点，物理、化学、天体物理、地球物理、生物物理可以全部归纳为物理科学。力学是物理科学的，数学又是所有学科的共同工具，力学和数学原是科学发展史上的孪生子，因此，形象的可以认为，物理科学是一根梁，力学和数学是它的两根支柱”。俄著名数理学家 V.I.Arnold 认为“数学是物理的一部分；物理是自然科学，且是实验科学；数学是物理中‘做实验’比较‘便宜’的那部分”。

如图 1 所示，我们把世界分成客观世界（包括自然世界，非自然世界）以及理性世界二大类；理性世界指我们对客观世界的认知，表现为我们所归纳的各种知识体系。按物理学和

*本文相关研究受上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目“‘现代连续介质力学理论及实践’课程体系”；上海市教委 2011 年重点课程立项项目“《数学分析》（一年制，面对力学等技术科学专业）”；复旦大学 2013 年暑期集中性教学项目（FIST）《现代张量分析及其在连续介质中应用》；国家自然科学基金面上项目（11172069）资助。

力学专业的核心课程，可见我们主要基于力学和数学的思想及方法认知自然世界，以不断拓展和深化我们的理性世界。我们把数学理解为“认识自然及非自然世界的系统的思想和方法，而非仅是数学逻辑”。此种观点，在俄罗斯数学教材选译等具有世界一流化水平的教程或专著中有着深刻的表现。进一步，我们提出这样的一种过程：$\lim\limits_{\text{认知}\to+\infty}\text{自然现象}=\text{数学机制}$，就此我们既认为数学机制应该是自然现象刻画的最佳形式，也认为对自然现象的刻画应该追求对应的数学机制。另值得指出，不同的数学机制可能为不同自然现象的共同本质或刻画，我们称之为“数学通识”[1]。法著名数学家 Poincare 对数学的阐述为“对不同事物给予相同刻画的技术”，V.I.Arnold 也有类似的观点。数学通识既可引导我们按数学结构归纳某门知识体系，也有益于建立不同知识体系之间的关系，为追求“（一门知识体系的）融会贯通与（多门知识体系的）触类旁通”提供实质性的引导。

1.2 数学实验

我们将实际的认识或者研究过程，归纳为三类实验：真实实验，数值实验以及数学实验。从科研研究角度而言，真实实验及数值实验均无法单方面将其所得结论确定为真理，因为真实实验不可能穷尽，真实实验及数值实验也不可避免地带有误差。数学实验（包括解析分析）指对实际研究对象首先建立模型，其次进行数学分析，然后将分析结果应用于实际对象。值得指出，数学实验可能在某些情况可单方面就能确认其实验结果为“真理”；但在某些情况也无法确认，此时相关结论必须经实践鉴别或者检验。以下列举二个数学实验事例。

☆ 数学实验可确认实验结论为“真理”的事例：平面曲边扇形以及曲边梯形的面积计算

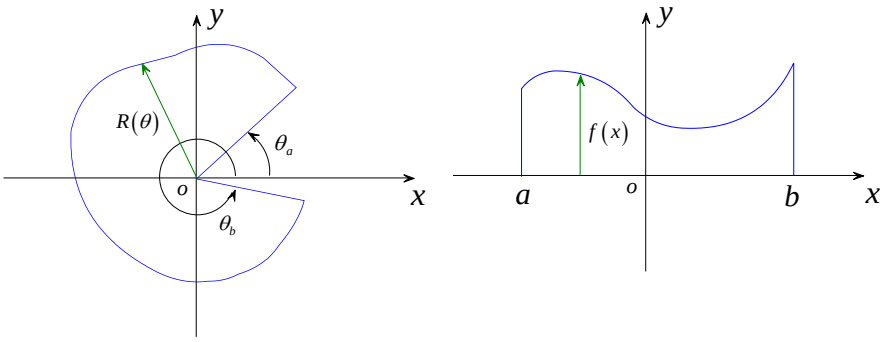


图 2 平面曲边扇形以及曲边梯形示意图

面对平面曲边扇形的面积计算，我们开展数学实验，包括：数学建模→数学分析→指导实践这三个基本过程。

1. 数学建模：按“分割→选取→求和→求极限”的过程，我们得到曲面扇形面积的一个计算方案：

$$S=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)\,d\theta:=\lim_{|P|\to 0}\sigma\left(\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta),P,\xi\right)=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\cdot R^2(\xi_i)\cdot\Delta\theta_i$$

2. 数学分析：致力于基于数学逻辑，研究上述面积计算方案的合理性。考虑到：对应分割 P，每子块的真实面积 $S_{real,i}$ 具有如下估计：

$$\left(\inf_{[\theta_{i-1},\theta_i]}\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)\right)\cdot\Delta\theta_i \le S_{real,i} \le \left(\sup_{[\theta_{i-1},\theta_i]}\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)\right)\cdot\Delta\theta_i,\quad \forall 1\le i\le N$$

则有：$L\left(\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta),P\right)\le\sum_{i=1}^{N}S_{real,i}=S_{real}\le U\left(\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta),P\right)$

按 Riemann 积分的相关理论，有：$R(\theta)\in R[\theta_a,\theta_b]\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot R(\theta)^2\in R[\theta_a,\theta_b]$，由此：

$$\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)\in R[\theta_a,\theta_b]\ \Leftrightarrow\ \exists\lim_{|P|\to 0}L\left(\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta),P\right)=\lim_{|P|\to 0}U\left(\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta),P\right)=:\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)d\theta$$

按夹逼性，则得平面曲边扇形面积计算的确定性结论：

$$\text{当 } R(\theta)\in R[\theta_a,\theta_b]\text{，则有：}\ S_{real}=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{1}{2}\cdot R^2(\theta)d\theta\text{。}$$

同理，我们可以得平面曲边梯形面积计算的确定性结论：

$$\text{当 } f(x)\in R[a,b]\text{，则有：}\ S_{real}=\int_a^b f(x)dx\text{。}$$

需指出，上述所谓的“确定性结论”的获得，实际基于共同的数学结构：真实值可由 Darboux 小和和 Darboux 大和控制。当 Riemann 可积时，Darboux 小和和大和具有相同的极限值，即为 Riemann 积分值；故按夹逼性，真实值必为 Riemann 积分值[†]。

☆ 数学实验未可确认实验结论为“真理”的事例：旋成体侧面积的计算

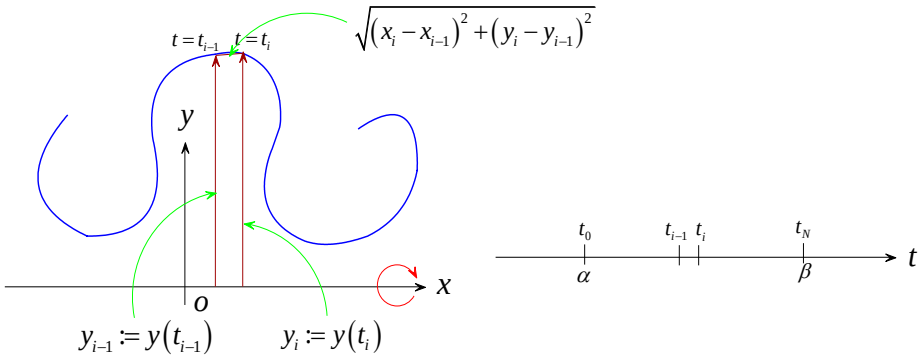


图 3 由一般平面曲线形成旋成体示意图

如图 3 所示，将曲线绕 x 轴旋转一圈可形成旋成体，现需给出其侧面积计算方案。对此，我们开展数学实验。针对旋成体局部侧面积的近似方法不同，我们可有如下两种方案。

方案 1：“旋成体局部侧面积用圆台侧面积进行近似”

[†] 张筑生著《数学分析新讲》的第一册，对此有所叙述。

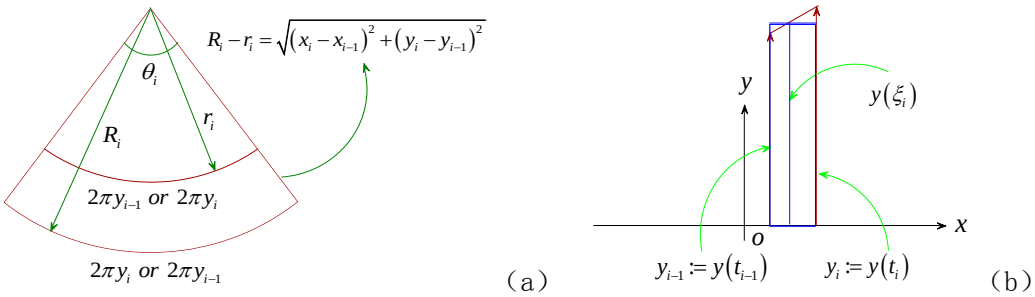


图 4 旋成体侧面积局部：（a）平台侧面积近似，（b）圆柱侧面积近似 示意图

局部圆台侧面积近似的几何关系如图 4（a）所示，可得：

$$S_i = \frac{1}{2}\cdot\left(R_i^2 - r_i^2\right)\cdot\theta_i = \frac{1}{2}\cdot\left(R_i + r_i\right)\cdot\left(R_i - r_i\right)\cdot\theta_i = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left(y_{i-1} + y_i\right)\cdot\sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i-1}\right)^2}$$
$$= \pi\left(y_{i-1} + y_i\right)\cdot\sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i-1}\right)^2}$$

利用 Lagrange 中值定理，

$$S_i = 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i + \pi\cdot\dot{y}\left(\alpha_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i\cdot\left(t_{i-1} - \zeta_i\right)$$
$$+ \pi\cdot\dot{y}\left(\beta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i\cdot\left(t_i - \zeta_i\right)$$

此处 $\forall\zeta_i \in \left(t_{i-1}, t_i\right)$。

籍此，我们易得估计：

$$\left|\sum_{i=1}^{N} S_i - \sum_{i=1}^{N} 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{N}\left|\pi\cdot\dot{y}\left(\alpha_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i\cdot\left(t_{i-1} - \zeta_i\right)\right| + \sum_{i=1}^{N}\left|\pi\cdot\dot{y}\left(\beta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i\cdot\left(t_i - \zeta_i\right)\right|$$
$$\le 2\pi\cdot\sup_{[\alpha,\beta]}\left|\dot{y}(t)\right|\cdot\left(\sup_{[\alpha,\beta]}\left|\dot{x}(t)\right| + \sup_{[\alpha,\beta]}\left|\dot{y}(t)\right|\right)\cdot(\beta - \alpha)\cdot|P|$$

对于上述分析，我们要求：$\vec{r}(t) \in C[\alpha,\beta]$，$\exists\dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha,\beta]$。

进一步，考虑估计：

$$\left|\sum_{i=1}^{N} 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\right|$$
$$\le\left|\sum_{i=1}^{N} 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\xi_i\right) + \dot{y}^2\left(\eta_i\right)}\cdot\Delta t_i - \sum_{i=1}^{N} 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\zeta_i\right) + \dot{y}^2\left(\zeta_i\right)}\cdot\Delta t_i\right|$$
$$+\left|\sum_{i=1}^{N} 2\pi\cdot y\left(\zeta_i\right)\cdot\sqrt{\dot{x}^2\left(\zeta_i\right) + \dot{y}^2\left(\zeta_i\right)}\cdot\Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\right|$$

对于 RHS 的第 2 项，由于 $\exists\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt \in \mathbb{R}$，则有估计：

对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta_{\varepsilon} > 0$，成立

$$\left|\sum_{i=1}^{N}2\pi\cdot y(\zeta_i)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i)+\dot{y}^2(\zeta_i)}\cdot\Delta t_i-\int_{\alpha}^{\beta}2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\right|<\varepsilon,\ \ \forall|P|<\delta_\varepsilon$$

对于 RHS 的第 1 项，有：

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{N}2\pi\cdot y(\zeta_i)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\eta_i)}\cdot\Delta t_i-\sum_{i=1}^{N}2\pi\cdot y(\zeta_i)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i)+\dot{y}^2(\zeta_i)}\cdot\Delta t_i\right|\\&\le\sum_{i=1}^{N}\left|2\pi\cdot y(\zeta_i)\right|\cdot\left|\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\eta_i)}-\sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i)+\dot{y}^2(\zeta_i)}\right|\cdot\Delta t_i\\&\le\sum_{i=1}^{N}\left|2\pi\cdot y(\zeta_i)\right|\cdot\left[\left|\dot{x}(\xi_i)-\dot{x}(\zeta_i)\right|+\left|\dot{y}^2(\eta_i)-\dot{y}^2(\zeta_i)\right|\right]\cdot\Delta t_i\\&\le 2\pi\cdot\sup_{[\alpha,\beta]}\left|y(t)\right|\cdot\left[\omega\left(\dot{x}(t),P\right)+\omega\left(\dot{y}(t),P\right)\right]\end{aligned}$$

综上，我们基于圆台侧面积近似的数学实验的结论为：

当有 $\vec{r}(t)\in C[\alpha,\beta],\ \exists\dot{\vec{r}}(t)\in R[\alpha,\beta]$，则有：

$$\exists\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{N}S_i\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta}2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\in\mathbb{R}$$

方案 2：“旋成体局部侧面积用圆柱侧面积进行近似”

基于局部圆柱侧面积近似，如图 4（b）所示，有：

$$S_i=2\pi\cdot y(\xi_i)\cdot|\Delta x_i|=2\pi\cdot y(\xi_i)\cdot|x_i-x_{i-1}|=2\pi\cdot y(\xi_i)\cdot\left|\dot{x}(\eta_i)\right|\Delta t_i$$

通过相关分析，基于圆柱侧面积近似的数学实验的结论为：

当有 $\vec{r}(t)\in C[\alpha,\beta],\ \exists\dot{\vec{r}}(t)\in R[\alpha,\beta]$，则有：

$$\exists\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{N}S_i\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta}2\pi\cdot y(t)\cdot\left|\dot{x}(t)\right|dt\in\mathbb{R}$$

至此，我们关于旋成体侧面积的计算提供了两种方案：

1. 按圆台侧面积近似，有：$\int_{\alpha}^{\beta}2\pi\cdot y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$

2. 按圆柱侧面积近似，有：$\int_{\alpha}^{\beta}2\pi\cdot y(t)\cdot\left|\dot{x}(t)\right|dt$

从数学实验角度而言，上述二者方案的数学建模、数学分析过程均符合逻辑过程。然而，仅需考虑圆锥侧面积就可鉴别按圆柱侧面积近似所得的数学结果与实际不符；而实践证明，圆台侧面积近似所得的数学实验结论是正确的。

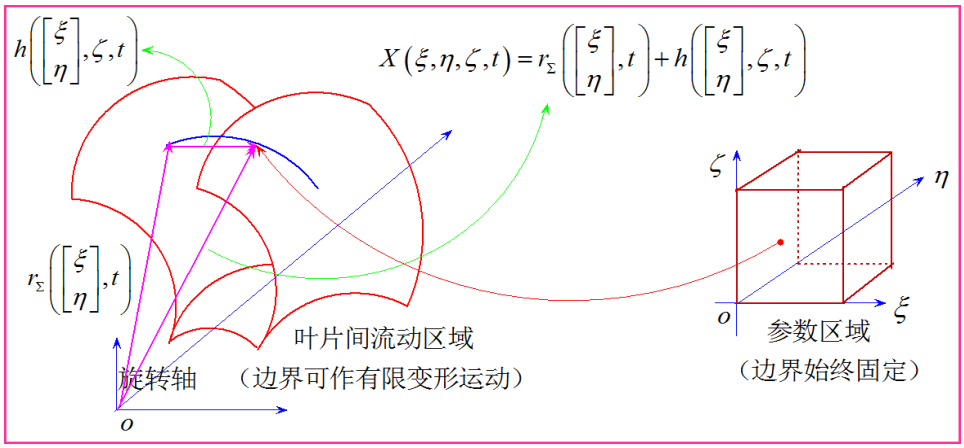
2 力学之专业基础知识体系

我们将力学之数学及专业知识体系的核心基础归纳为“微积分一流化进程”以及“现代连续介质力学理论及其实践”二条路径[1]，现已分别建立了课程体系[‡]。数学基础路径为专

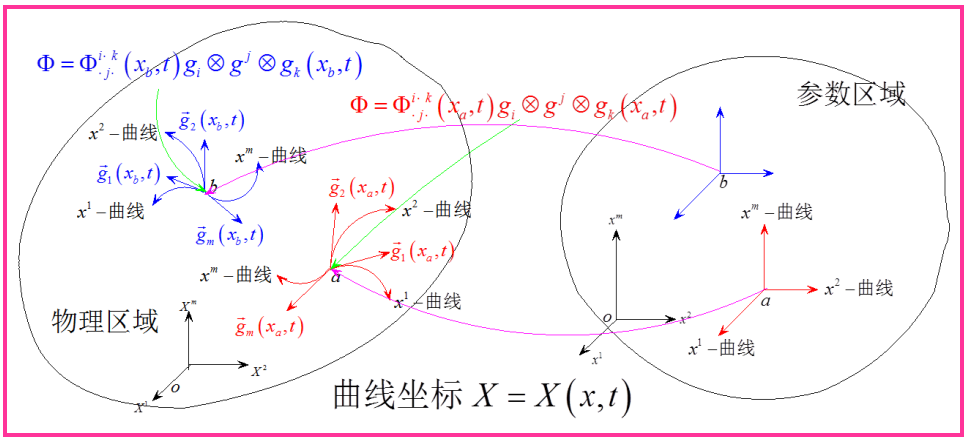
[‡] “微积分一流化进程”课程网站 http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/；“现代连续介质力学理论及实践”课程网

业基础路径提供了适合的数学思想及方法。在此我们也特别指出，一般教学教程或专著的所载的数学思想及方法往往不能直接适用于力学或者物理研究，由此需要我们结合实际问题寻找合适的数学，包括以恰当的方式理解甚至建立数学定义，将相关数学思想及方法充分联系与实际研究。以下我们就连续介质的有限变形理论进行概要性说明。

2.1 映照观点



（a）



（b）

图 5 映照观点示意图：（a）将几何不规则区域微分同胚至几何规则区域；（b）基于曲线坐标系的局部基展开张量

物理空间中连续介质的几何形态随时间可发生任意形态的变化，而各种物理量（张量场）则定义（分布）于各介质质点之上。原则上，我们可以直接利用物理空间中的 Cartesian 坐标刻画连续介质几何形态，展开张量场分布。另一种方式，我们可以首先建立物理区域（连续介质所处的空间区域）与参数区域之间的微分同胚/曲线坐标系[1,2]。藉此，如图 5 所示，可将几何形态不规则的物理区域一一对应至几何形态规则的参数区域，甚至参数区域可以不随时间变化；可将物理区域上张量场对应至参数区域上张量场（由曲线坐标刻画连续介质质点的位置），并且基于曲线坐标系自身确定的局部基（位于物理区域）展开张量场控制方程。

我们将上述认识称为映照观点。基于映照观点，往往可将物理区域的复杂边界对应至参数区域的平面或者直线，从而避免了对几何边界的离散或者近似；可基于张量场场论简便地获得定义于参数区域的张量场分量所需满足的偏微分方程（PDE），这些方程将显含曲线坐

标系的几何信息，如度量张量分量、Christoffel 符号等。一般而言，参数区域上的 PDE 较直接按 Cartesian 坐标展开的 PDE 从形式上更为复杂，前者往往多出混合偏导数项以及几何量，但对于数值计算这些都不会带来实质性困难。另一方面，由于我们在几何形态规则的参数区域中求解 PDE（物理边界对应于参数区域的规则边界），故仅需采用参数区域上的 Cartesian 坐标就可构建差分或者有限元格式，无需特别的网格构建。

亦需指出，工程实际中的复杂物理区域往往不能仅通过一个曲线坐标系实现其至参数区域的微分同胚，由此需要多个曲线坐标系局部地实现微分同胚，此时需处理重叠区域的计算问题等。流形上的微积分原则上提供了相关思想及方法，如单位 1 分解在 Stokes 公式证明中的作用，但单位 1 分解的具体实现仍需专门的研究。

2.2 连续介质的几何形态

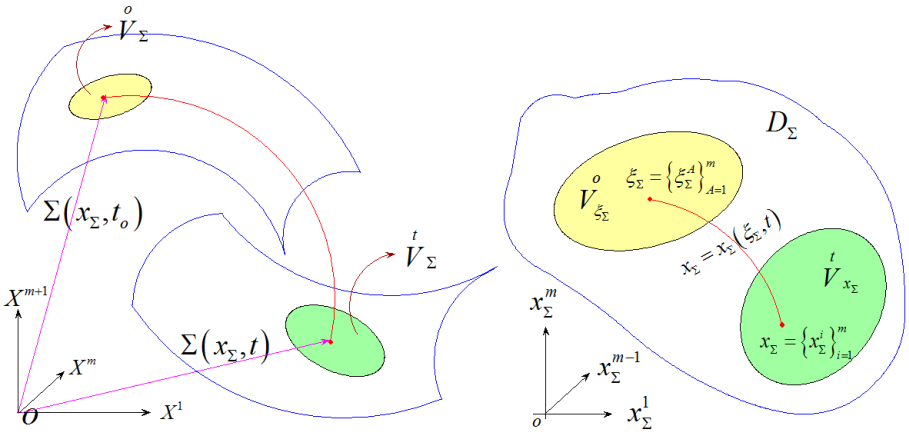


图 6 几何形态为曲面的连续介质有限变形运动的构型构造

随着现代科学技术的发展，人们已经开始关注纳米膜、细胞膜等这种厚度方向特征尺度远小于展向特征尺度的连续介质的变形运动。此外，研究星球表面的大范围大气运动，则有大气的厚度远远小于星球半径。由此可见，我们可能需要研究几何形态为曲面的连续介质的有限变形运动，此时将连续介质的几何形态视作曲面，可通过引入面密度来刻画连续介质实际的厚度分布及演化。

如图 6 所示，参照经典的几何形态为体积的连续介质的有限变形理论，我们仍可以建立初始物理构型$\overset{o}{V}_\Sigma$、当前物理构型$\overset{t}{V}_\Sigma$以及初始参数构型$\overset{o}{V}_{\xi_\Sigma}$、当前参数构型$\overset{t}{V}_{x_\Sigma}$。初始及当期物理构型位于运动曲面之上（连续介质可位于曲面之上进行独立运动），其向量值映照表示为：

$$\Sigma(x_\Sigma,t):D_\Sigma\times(t_0,t_0+T)\ni\{x_\Sigma,t\}\mapsto\Sigma(x_\Sigma,t)$$

而初始及当前参数构型均位于运动曲面的参数区域D_Σ之中。基于构型定义，我们仍可以通过微积分引入变形梯度；通过研究变形梯度的基本性质，可以给出变形刻画；基于变形刻画，可以获得各种形式的输运方程。藉此，可建立几何形态为曲面的连续介质有限变形运动的几何学及运动学，包括连续性方程[3]。

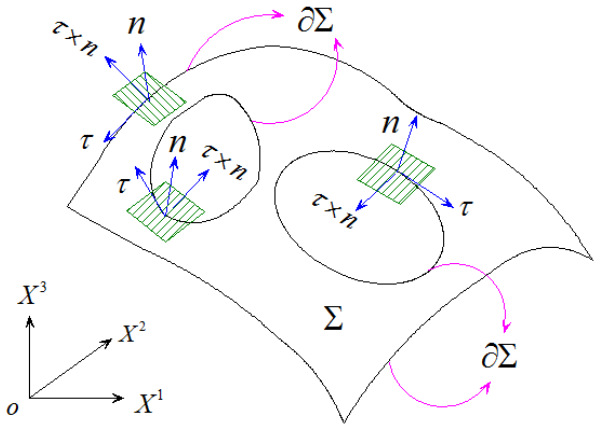


图 7 第二类内蕴形式广义 Stokes 公式示意图

就动力学，如图 7 所示，我们主要基于第二类内蕴形式的广义 Stoke 公式[3,4]

$\oint_{\partial\Sigma}(\tau\times n)\circ -\Phi\, dl=\int_{\Sigma}\left(\overset{\Sigma}{\nabla}\circ -\Phi+Hn\circ -\Phi\right)d\sigma$，$\overset{\Sigma}{\nabla}\triangleq g_{\Sigma}^{l}\dfrac{\partial}{\partial x_{\Sigma}^{l}}(x_{\Sigma},t)$ 为曲面梯度算子，$\Phi(x_{\Sigma},t)$ 可为定义在曲面上的任意张量场，H 为平均曲率，将沿 $\tau\times n$ 方向的作用（表现为介质边界上的线积分）转化为面积分。结合输运定理就可获得各种守恒律的微分方程。

对于自然界中“薄层介质”（流体可为细胞膜、皂膜、海面上油污、星体上大气等；固体可为板和壳、纳米膜等）可有二种处理方法：第一类，由三维近似至二维。技术上可引入小参数做摄动展开；或者选取一张中心面，将沿厚度的作用等效于沿中心面边界的积分[5]。此类研究的张量场场论对应于 Euclid 流形上的场论，亦即 Riemann-Christoffel 张量自然为零。第二类，由二维（曲面）至三维。技术上可引入面密度（体密度乘厚度，体密度一般为常数）。此类研究的张量场场论对应于 Riemann 流形上的场论，亦即 Riemann-Christoffel 张量不自然为零。以上所概述的几何形态为曲面的连续介质有限变形理论隶属第二类。上述二类处理方法可视作不同的力学建模方式，其适用性应该依赖于具有问题；可能随着厚度的减小，第二类建模方式会越来越适合，相关理论需要不断地经实践检验并得以完善。

鉴于几何形态为曲面的连续介质有限变形理论的出现（包括 Aris 早期进行的固定曲面上二维流动的相关研究[6]），我们建议将连续介质按其几何形态区分体积形态以及曲面形态二类[3,7]，分别对应于 Euclid 流形以及 Riemann 流形，由此也分别对应于 Euclid 流形以及 Riemann 流形上的场论。由于 Riemann 流形上 Riemann-Christoffel 张量不自然为零，故几何形态为曲面的连续介质的相关守恒律方程中会直接含有几何同力学的耦合项。

另就体积形态的连续介质的有限变形理论，基于映照观点，我们提出了当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形[3,7]，希冀相关理论能有益于含有可变形边界的流动以及流固耦合问题。

2.3 基础知识体系（理论及实践）

作者在复旦大学已多次开设专业选修课程《张量分析与微分几何基础》、《连续介质力学基础》，一般每学年在不同学期开设这二门课程。课程的广度及深度一直追求能基本达到郭仲衡先生著《张量（理论和应用）》[8]、《非线性弹性理论》[9]等教程或专著，现总体上业已实现。

主要结合近期我们在连续介质有限变形理论方面学习与研究，我们将张量分析及有限变

形理论基础知识体系的教学做如下设计，分为五个部分：

第Ⅰ部分 张量定义及其基本代数性质 张量之多重线性映照定义；张量表示；张量基本代数运算；外基运算；仿射量基本性质（特征问题，谱分解，极分解）

第Ⅱ部分 有限维 Euclid 空间中体积上张量场场论 一般曲线坐标系下场论；张量场一点及多点形式的非完整基理论（涉及非完整单位正交基）；Gauss-Ostrogradskii 公式（涉及涡动力学中动量导数矩理论）；应用事例：可压缩湍流时均方程，基于曲面的半正交系及其在旋转机械流动中的应用（吴仲华理论），可变形机翼三维绕流，可变形壁面槽道流

第Ⅲ部分 有限维 Euclid 空间中面积上张量场场论 曲面论第一、第二基本形式；Gauss 曲率及平均曲率；截线曲率，主曲率及主方向；Riemann-Christoffel 张量；内蕴形式广义 Stokes 公式；光滑曲面的微分流形定义；曲面上的微分运算（Lie 导数，外微分）

第Ⅳ部分 体积形态连续介质力学相关理论 当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论；可变形边界上涡量动力学（吴介之等主要发展）

第Ⅴ部分 曲面形态连续介质力学相关理论 几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论；固定曲面上二维流动涡量动力学；应用事例：固定曲面上二维流动，海面油污扩散，膜振动

第Ⅵ部分 张量映照微分学 基于一般赋范线性空间上微分学给出张量映照微分学

上述设计中，我们将张量场场论分类为 Euclid 空间中体积及曲面上张量场场论，按 Euclid 空间上的微分学观点，引入曲线坐标系，曲面基本量及曲面曲率，Riemann-Christoffel 张量，体积以及面积上定义的张量场的可微性等核心概念；基于微分学观点，利用极限定义可使得相关概念的叙述既能突出力学、物理意义，又能数学上处理严格。体积及曲面上张量场场论主要在课程《张量分析与微分几何基础》上叙述；相应地，在课程《连续介质力学基础》上叙述体积及几何形态连续介质的有限变形理论。

我们的学习、研究与教学，追求基于高端知识体系发展可适用于一类问题的新思想及新方法，由此我们也注重理论联系实际。课程中，我们鼓励学生以评判的眼光审视课程所受的所有理论（思想及方法），并鼓励和支持学生结合实际问题实践相关理论。

我们追求相关教学的广度及深度能类比于国内外具有一流水平的教程或专著，就此我们将专业知识体系紧密联系与数学知识体系，现已较为理想地实现了基于微积分知识体系支撑张量分析及有限变形理论知识体系，使得相关课程对本科生就能适用。近年的教学实践支持了我们的观点和做法。

3 学习、研究与教学现有体会

总体上，我们就学习、研究与教学的现有体会，归纳为以下四点：

研习 经一定实践，基于“微积分知识体系”，可以自然地向学生传递“张量分析及连续介质有限变形理论基础知识体系（理论及应用）”；微积分作为数学联系实际的桥梁就是微积分的核心思想“极限”；彻底理解张量场以及张量映照应该基于一般赋范线性空间上的微分学。

继承 经较为系统的调研，当今国内大学教学同世界一流水平在课程的广度及深度上具有明显的差异；由此，力学领域的青年教师需要切实追求高端知识体系，研习经典教程或著作。

发展 力学学者对高端知识体系自然提出应用意愿，就此需对纯粹知识体系具有极为深入的认识，涉及对相关概念的改写或再认识；作为回报，高端知识体系往往成为真正原创思想及方法的源泉。

传播 学术不应仅理解为具体的科学和技术成果而且应包括更具基础意义的高端知识体系

—— 既在于催生原创思想及方法，也在于培养人才。

参考文献

[1] 谢锡麟.“正本清源”在力学之数学及专业基础知识体系建立中的作用. 力学季刊，2012，33（4）：544－557.

[2] 谢锡麟. 基于郭仲衡先生现代张量分析及有限变形理论知识体系的相关研究. 力学季刊，2013，34（2）：337－351.

[3] XIE X L., CHEN Y., SHI Q. Some studies on mechanics of continuous mediums viewed as differential manifolds. Sci. China-Phys. Mech. Astron. 2012, 56(2):432-456.

[4] XIE X L. On two kinds of differential operators on general smooth surfaces. 复旦学报，2013，52（5）：688－711.

[5] Chien W Z. The intrinsic theory of thin shells and plates, part I－general theory. Quarterly of Applied Mathematics, 1941, 1(4):297－327.

[6] Aris R. Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics. New York: Dover Publications, INC, 1989.

[7] 谢锡麟，陈瑜，史倩. 有限变形理论的若干进展及其在流体力学中的相关应用. 复旦学报，2013，52（4）：547－557.

[8] 郭仲衡. 张量(理论和应用). 北京: 科学出版社, 1988.

[9] 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京:科学出版社, 1980.