第十一讲

复习：

上次课讲得是导体中的电行为。导体的主要特征是有“自由电荷”，在电场的作用下导体中的电荷会运动，产生附加场，而附加场又会反作用于电荷。因此附加场的有无就给了我们两种不同情况下的导体的电平衡状态 --- 1）静态平衡（有附加场），2）动态平衡（以某种方式将附加场去除）。后面一种平衡状态的一个主意特征物理量就是电流。

① 电流： $i=\dfrac{dq}{dt}$， $i=\int \vec{j}\cdot d\vec{S}$， $\vec{j}(\vec{r})=\rho_e(\vec{r})\vec{v}_d(\vec{r})$

② 电荷守恒

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho_e(\vec{r},t)d\vec{r}=-\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \qquad \Rightarrow$$

稳恒条件： $\dfrac{d}{dt}\rho_e(\vec{r})=0$， i 守恒

③ 欧姆介质

微观： $\vec{j}(\vec{r})=\sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$ 　　　σ 是电导率

$\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})$ 　　　ρ 是电阻率（欧·米）

④ σ、ρ 的微观起源

$\dfrac{d\vec{v}_d}{dt}=\dfrac{q\vec{E}}{m}-\dfrac{\vec{v}_d}{\tau}$：外部驱动力与散射作用（等效为摩擦力）平衡。

$$\sigma=\frac{n_0q^2\tau}{m}$$

二. 电介质（绝缘体）

绝缘体（又叫电介质）是与导体截然不同的另一种物质，其最大的特征就是电荷为束缚电荷，不能自由流动从而形成电流。那么当外电场作用于一块电介质的时候，它的电行为又如何呢？

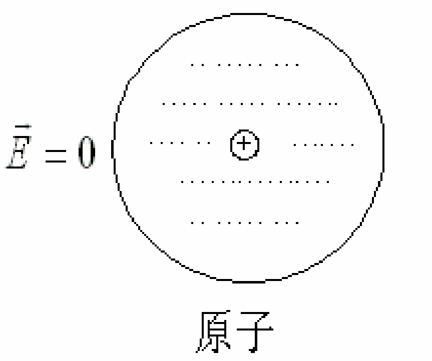
这里要强调的是，静电场是由电荷产生的，不管是自由电荷还是电介质的束缚电荷，只要存在电荷，就会产生电场。因此要想知道在介质中的电场，我们必须首先知道介质中的电荷对外电场是如何响应的。

只有知道了介质中的束缚电荷的分布，我们才有可能得知空间总电场的行为。下面我们将由浅入深地，一步步地研究。

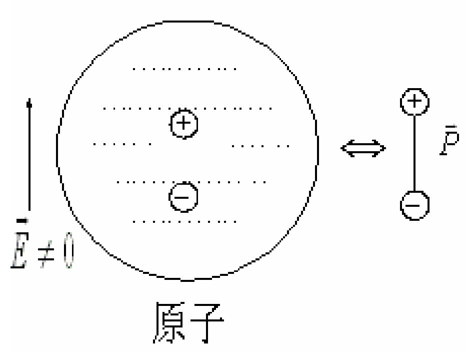
(一)、分子（原子）的极化

首先从最简单的分子（原子）对外电场的相应开始。这中间又包含了两种情形。

1．非极化原子：正负电荷中心重合的原子。



$\vec{E}=0$ 时，原子没有极性

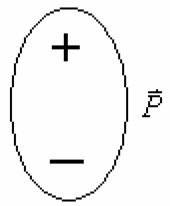


$\vec{E}\neq 0$ 时，原子正负电荷中心偏离中心位置，等效于一个偶极子。这叫“位移极化”现象。

$E << E_{电离}$　　$P\propto E$，线性变化；

E 较大时　　$P=\alpha E+\alpha^{(2)}E^2+\cdots$　　非线性；

$E>E_{电离}$　　被电离



我们只考虑电场较小的情形，即 $\vec{p}\propto\vec{E}_{ext}$

2．极化原子：正负电荷中心偏离的原子。

这类原子当外电场 $E=0$ 时有固有偶极矩，它的正负电荷的中心不重合。

这时我们加电场 $\vec{E}$，$\vec{p}$ 当然会加强（将正负电荷进一步拉开）

因为 $\vec{p}=\vec{p}_0+\alpha\varepsilon_0\vec{E}$，但这非主要响应

$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}=p_0E\cos\theta+\alpha\varepsilon_0E^2$，　当 $E\to 0$ 时这项贡献 E^2 是小量。

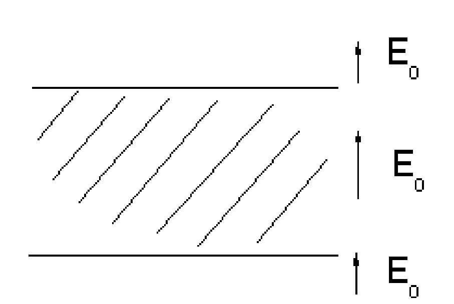
在外加电场中，0 级的响应是转动，其结果使得 $\vec{P}$ 平行于 $\vec{E}$。

（二）宏观介质对电场的响应

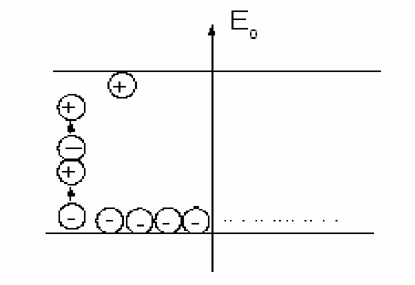
<u>1．基本图象</u>

非极性分子

平板介质 非极化分子



$\Rightarrow$

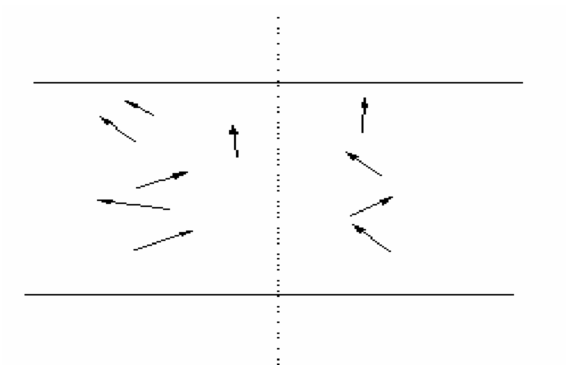


将一个由非极性分子（原子）构成的介质放置于外电场中时，分子（原子）被外场极化，产生一个个与电场方向平行的偶极子，如上图所示。

极性分子：

$\vec{E}_0 = 0$时，尽管每个分子有极性，由于热运动的影响，这些分子的偶极距的方向是完全随机的，因为$\langle \vec{p} \rangle = 0$，平均下来不显示宏观的极性。

$\vec{E}_0 \neq 0$时，每个分子“倾向于”外电场，宏观极性开始显现：$\langle \vec{p} \rangle \neq 0$。另一方面，热运动的影响是使得这些固有极距的方向完全杂乱分布。这两个因素的竞争决定了$\langle \vec{p} \rangle$的大小。电场越大，前面的影响力越大，$\langle \vec{p} \rangle$越大。



思考：

①P 完全由E_0决定？

②极化过程什么时候达到稳定？

2. 极化强度

与单个分子不同，大块的固体中包含有大量的分子，极化后含有大量的偶极子。如何刻画宏观物质的极化的程度？

极化强度$\vec{P}$（宏观） $\leftrightarrow$ 偶极子$\vec{p}$（微观）

$\vec{P}$ 是偶极子的强度的宏观体现。

定义： $\vec{P}=\dfrac{\sum_i \vec{p_i}}{\Delta V}$

$\vec{p}$ 大，$\vec{P}$ 不见得大，$\vec{P}$ 是宏观量。

3．极化率

$\vec{E}_0$ 很小时，许多介质是线性响应，即介质某处的极化强度与介质此处的总电场成正比。

定义：物质的极化率 χ： $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$

更严格的定义（非均匀的任意情形） $\boxed{\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0\chi\vec{E}(\vec{r})}$

其中 $\vec{E}\neq\vec{E_0}$，$\vec{E}$ 是总局域电场，$\vec{E_0}$ 是外加电场。需要强调的是，静电场范畴内，电场都是由电荷产生的。空间的电荷包括两部分：（1）放在远处的产生 $\vec{E_0}$ 的电荷 $\rho_0(\vec{r})$，（2）因为介质被极化而产生的束缚电荷分布 $\rho_p(\vec{r})$。总的局域电场就是由这两部分电荷产生的电场的叠加 $\vec{E}=\vec{E_0}+\vec{E_P}$（外电场+极化电荷电场）。需要指出的是：这里我们假设源电场电荷不受极化电荷电场的影响。

（三） 极化电荷 $\rho_p(\vec{r})$ 与极化强度 $\vec{P}(\vec{r})$ 的关系

要计算 $\vec{E}_p(\vec{r})$，需计算极化电荷分布 $\rho_p(\vec{r})$。这里我们将讨论对已知的一个极化强度 $\vec{P}(\vec{r})$，如何来计算由此产生的 $\rho_p(\vec{r})$。

在具有极化强度分布为 $\vec{P}(\vec{r})$ 的一块介质中的一个任意形状的区域 Ω 内，我们求区域中包含的束缚电荷总量 Q_p。根据极化强度的定义，区域内有 $N_p=\int\vec{P}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ 个偶极子。如果这N个偶极子完全处于 Ω 中，因为每个偶极子必然包含等量异号的电荷，则对 Ω 内的净电荷总量没有贡献。因此，只有穿过其表面的 $\vec{p}_i$ 才对 Ω 中的<u>净束缚电荷</u>有贡献。 将 Ω 的表面分成一块块的小面积，分别考虑这些小面积

上穿过的偶极子对区域内的电荷总量的贡献。对任意一块小面积$\Delta\vec{S}$，设其为宏观小，微观大，只有偶极子与面元不平行（$\Delta\vec{S}\cdot\vec{p}_i\neq 0$）才可能“穿过”此面元，从而对电荷有贡献。每一个穿过此面元的偶极子$\vec{p}_i=\vec{l}q_i$对Ω内的净电荷的贡献可由下式计算：

$$\Delta\vec{S}\cdot\vec{p}_i=\Delta\vec{S}\cdot\vec{l}\cdot q_i=-\Delta\Omega\cdot q_i \quad\Rightarrow\quad q_i=-\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{p}_i}{\Delta\Omega}$$

负号是因为$\overrightarrow{p_i}$是由负电指向正电。将穿过$\Delta\vec{S}$的所有的偶极子的贡献全部叠加，可得

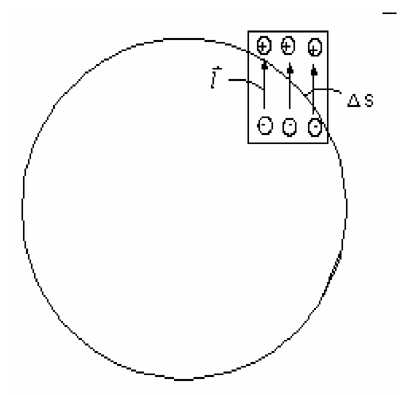
$$\Delta q=\sum_i q_i=-\sum_i\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{p}_i}{\Delta\Omega}=-\Delta\vec{S}\cdot\sum_i\frac{\vec{p}_i}{\Delta\Omega}=-\Delta\vec{S}\cdot\vec{P}(\vec{r})$$

为区域$\Delta\Omega=\Delta\vec{S}\cdot\vec{l}$内的净电荷。对所有面积元求和变积分可得：

$$\sum\Delta q=-\sum\Delta\vec{S}\cdot\vec{P}=-\oint\vec{P}\cdot d\vec{S}$$

则：

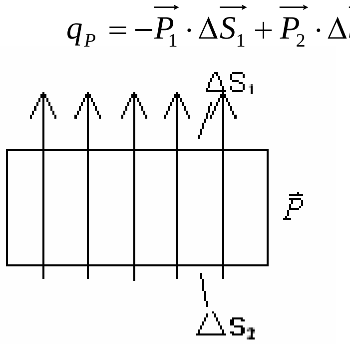
$$\boxed{\oint\vec{P}\cdot d\vec{S}=-Q_P=-\int_\Omega\rho_P(\vec{r})d\vec{r}}$$

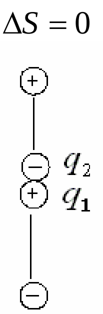


应用举例：

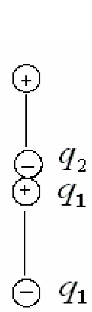
<u>**（1）均匀极化的材料内部**</u> $\quad q_p=0$

ΔV内的 $\quad q_P=-\overrightarrow{P_1}\cdot\Delta\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{P_2}\cdot\Delta\overrightarrow{S_2}=(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1})\cdot\Delta S=0$





均匀极化,$q_1=q_2$



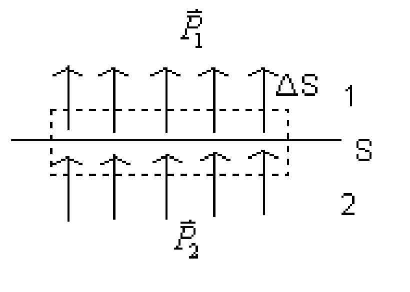
非均匀极化,$q_1\neq q_2$

物理上看，内部的电荷互相抵消

（2）非均匀极化的材料内部

非均匀极化，$\overrightarrow{P_1} \neq \overrightarrow{P_2}$， $q_1 \neq q_2$，有净极化电荷 q_P

（3）均匀极化的两种介质分界面



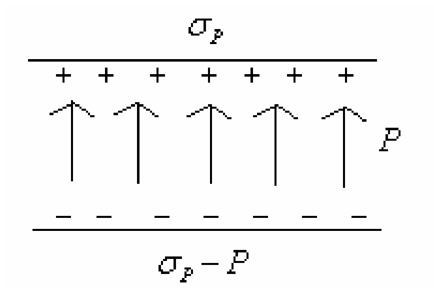
两种介质内部都没有极化电荷

但界面出 $q_P \neq 0$，故极化电荷只能以面电荷

σ_P 形式分布

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = (P_1 - P_2)\Delta S = -q_P$$

a) $\vec{P}$ 垂直于 $\vec{S}$



$$\sigma_P = \frac{q_P}{\Delta S} = -(P_1 - P_2)$$

1 是空气　　$P_1 = 0$　　　$\sigma_P = P_2$

2 是空气　　$P_2 = 0$　　　$\sigma_P = -P_1$

因此，放置于空气中的一个均匀极化的具有极化强度为 $\vec{P}$ 的介质的上表面有+极化电荷（极化电荷面密度位 $\sigma_P = P$），下表面有-极化电荷（极化电荷面密度位 $\sigma_P = -P$）。

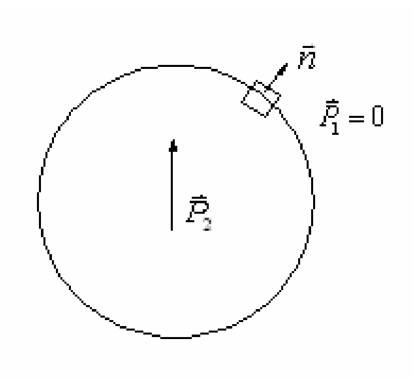
b) $\vec{P}$ 不垂直于 $\vec{S}$ （如右图所示，选取合适的闭合曲面）

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q_P$$

$$= \overrightarrow{P_1} \cdot \Delta\vec{S} - \overrightarrow{P_2} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$= -\overrightarrow{P_2} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$= -\overrightarrow{P_2} \cdot \vec{n} \cdot \Delta S$$



故一般情况下， $\sigma_P = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_2}$

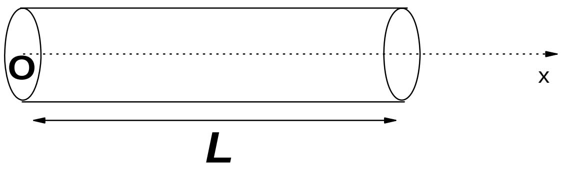
习题：

1）一个圆柱状的电介质，截面半径为 R，长为 L，被沿着轴线方向极化，已知极化强度 $\vec{P}(x)=kx\hat{e}_x$（k 为比例常数），坐标原点取在圆柱的一个端面上，如图所示，试求

（i）极化电荷的分布情况;

(ii) 极化电荷的总电量;

(iii) x 轴任意一点的电场强度 **E**（假设空间没有其他电荷源，并且棒子很细 $R<<L$）



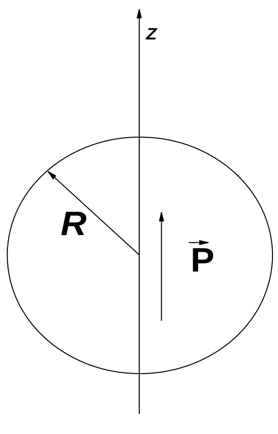
习题 1 图

2）一个半径为 R 的介质球，沿 z 方向被均匀极化，设极化强度为 **P**，空间没有其他的电荷源（球为驻极体）。 求

（i） 空间的极化电荷分布;

（ii） 极化电荷在 z 轴上产生的电场（球内球外都要考虑);

（iii）将你的（球外电场计算结果与一个偶极子（偶极矩为 $\bar{p}$ ）的电场相比较，得到什么结论？



习题 2 图