

第 13 次课 (进动运动, 重力矩, 章动) 10 月 19 日

本节课主要解决: 1) 在进动参照系中, 重力矩的作用问题
2) 章动问题

问题 1)

在图中以 $\vec{\omega}_p$ 角速度旋转的进动参照系

非惯性系

惯性力

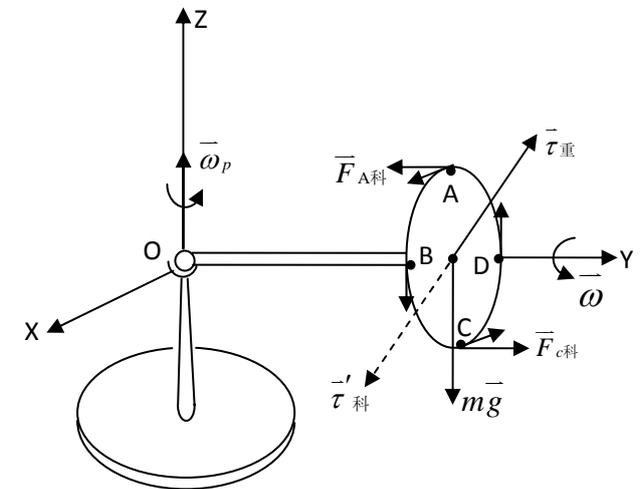
惯性离心力

被支点 O 的约束力所平衡

故不产生力矩作用

科里奥利力

产生力矩



$$\vec{f}'_{科} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_p$$

- A 点: 方向-Y 轴
- B 点: 为零
- C 点: 方向+Y 轴
- D 点: 为零

四点所受的科里奥利力所产生的力矩方向为+X 轴方向

⇓

整个转盘上各点所受的科里奥利力总体产生的力矩方向: $\vec{\tau}'_{科} \parallel \vec{\omega} \times \vec{\omega}_p$ (|| 表示平行)

$\vec{\tau}'_{科}$ 方向与重力矩 $\vec{\tau}_{重}$ 方向相反, 若大小一致, 则在进动的参照系中所观察到的合力矩

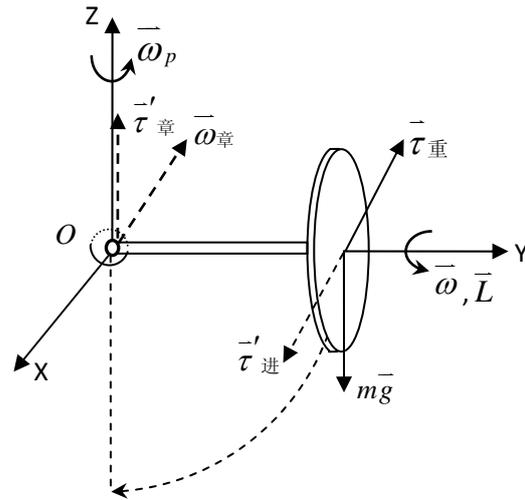
$\vec{\tau}'_{科} + \vec{\tau}_{重} = 0$, 故 \vec{L} 守恒, 所观察到的 \vec{L} 大小和方向不变。

$\vec{\tau}'_{科}$ 又称迴转力矩, 其作用平衡重力矩的作用。

问题 2)

i) 当陀螺自转轴（初始沿 y 轴）自水平方向静止释放后，开始它并不绕 z 轴进动，而是在重力矩 $\vec{\tau}_{重}$ 或重力 $m\vec{g}$ 作用下，发生下倾的绕 x 轴的旋转运动（章动）。

ii) 在绕 x 轴旋转的过程中，其章动的角速度 $\vec{\omega}_{章}$ （ $-x$ 轴方向）不断增加。在章动的非惯性参照系中系统一定要受到一个迴转力矩 $\vec{\tau}'_{章}$ （沿 $+z$ 轴方向）的作用（参



见上一个问题的讨论)， $\vec{\tau}'_{章}$ 迴转力矩的大小随 $\vec{\omega}_{章}$ 增加而增加。

$$\vec{\tau}'_{章} \parallel \vec{\omega} \times \vec{\omega}_{章} \quad (\parallel \text{为平行})$$

iii) 在 $\vec{\tau}'_{章}$ 迴转力矩作用下，系统产生绕 z 轴的旋转运动——即进动，进动角速度随 $\vec{\tau}'_{章}$ 增加以及时间的增加而不断增加。

iv) 在进动的非惯性参照系中，系统又受到了一个进动的迴转力矩 $\vec{\tau}'_{进}$ （方向 $+x$ 轴）的作用，它的方向与重力矩方向相反，故抵消重力矩的作用，导致章动角加速度下降。

由于 $\vec{\omega}_{章} \uparrow \Rightarrow \vec{\tau}'_{章} \uparrow \Rightarrow \vec{\omega}_p \uparrow \Rightarrow \vec{\tau}'_{进} \uparrow$ ， $\vec{\tau}'_{进}$ 进动迴转力矩最终可以超过 $\vec{\tau}_{重}$ ，故合力矩的方向沿 x 轴正向，这时将产生一个沿 x 轴正向的角加速度。

$$\vec{\tau}'_{进} \parallel \vec{\omega} \times \vec{\omega}_p$$

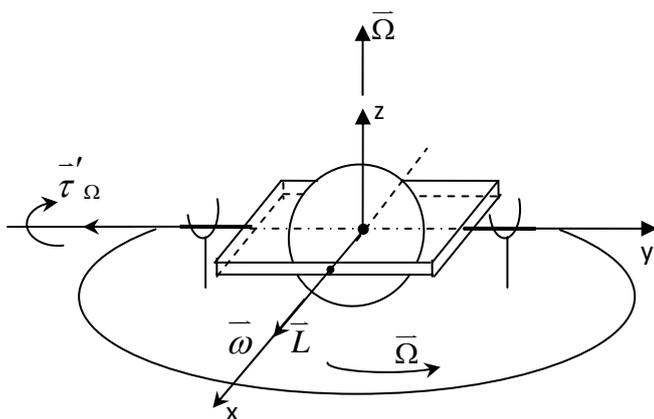
v) 在此角加速度的作用下，沿 $-x$ 轴方向的 $\vec{\omega}_{章}$ 不断减小，最终减至零并进而产生沿 x

轴正向的 $\vec{\omega}_{章}$ ，此时系统下倾到最低点而产生向上的旋转运动。这时 $\vec{\tau}'_{章}$ 力矩反向，

其作用使 $\vec{\omega}_p$ 减速，导致 $\vec{\tau}'_{进}$ 下降 -----► 这种往复作用导致章动！

以上两个问题的实质是物体的惯性使然。

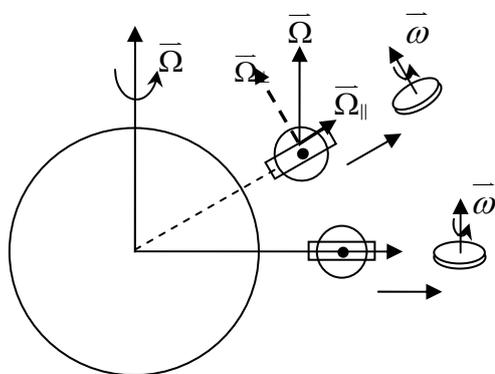
二自由度迴转罗盘



- i) 根据前两个问题讨论，在 $\bar{\Omega}$ 旋转的非惯性参照系中，罗盘受到 τ'_Ω 迴转力矩作用，其方向沿 $-y$ 轴方向。 $\tau'_\Omega \parallel \bar{\omega} \times \bar{\Omega}$
- ii) 在该力矩作用下，罗盘绕 $-y$ 轴转动，最终 $\bar{\omega}$ 或 \bar{L} 与 $\bar{\Omega}$ 平行，此时罗盘不再受惯性力矩（迴转力矩）的作用。

该罗盘自转角动量有指向转动参照系的角速度 $\bar{\Omega}$ 方向趋势。

↓
作为指北针

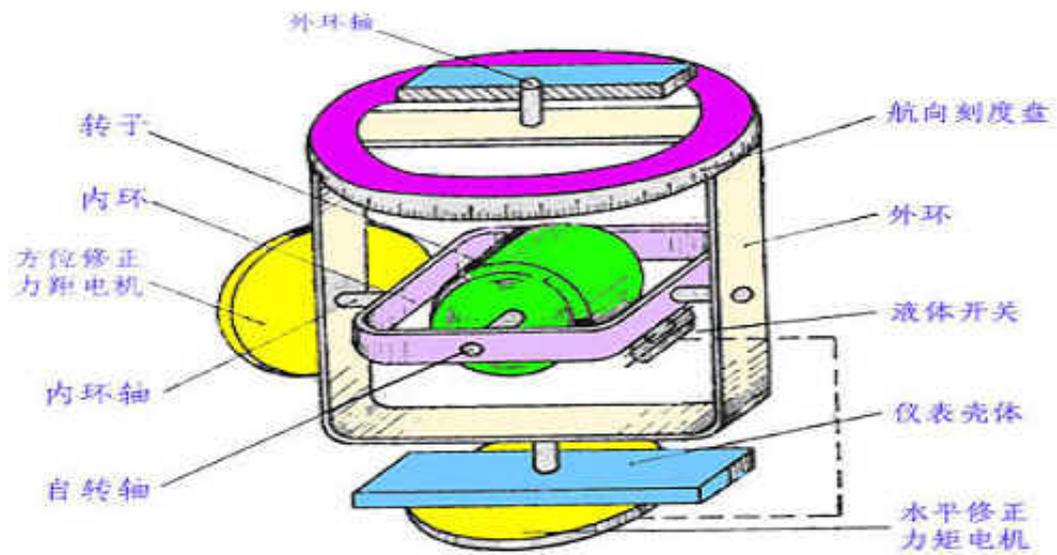
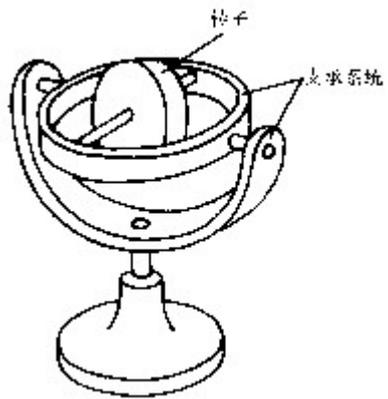


$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\parallel} + \bar{\Omega}_{\perp} \leftarrow \text{趋向} \bar{\omega}$$

↓
对罗盘没有作用

\bar{L} ：方向稳定性

三自由度陀螺：具有定向、制导、导航作用



陀螺半罗盘的结构原理图