

## 第二十四讲

复习:

● 磁化的完整图像

$$\vec{B}_f \rightarrow \vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \rightarrow I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \rightarrow \vec{B}_m(I_m)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_f + \vec{B}_m, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_f + I_m)$$

● 辅助矢量:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

### 四、磁性介质的分类

线性磁介质: 
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}$$

(1) 抗磁体  $\chi_m < 0$

抗磁性的起源, 没有固有磁矩

Lenz 定律  $\Rightarrow$  磁场  $\rightarrow \vec{M} // -\vec{B}$

自由电子, 轨道电子的拉莫运动, 存在于所有介质中, 但极弱:  $|\chi_m| \ll 1$ 。

(2) 顺磁体  $\chi_m > 0$

有固有磁矩:  $\vec{m}_0 \quad \vec{B} = 0 \quad \langle \vec{m} \rangle = \vec{M} = 0$  (温度及其它效应)  $\vec{B} = 0$

$\vec{B} \neq 0 \quad U = -\vec{B} \cdot \vec{m} \Rightarrow \langle \vec{m} \rangle = \vec{M} // \vec{B}$

温度效应及磁场的竞争导致  $\vec{M} \propto \vec{B}$

顺磁体中, Lenz 定律引发的抗磁性依然存在,

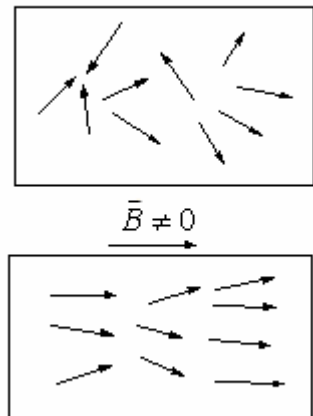
但效应被掩盖。可以预期,  $\frac{\vec{M}}{\vec{B}}$  强烈依赖于温度。

$T \downarrow$ , 涨落效应  $\downarrow$ , 则  $\vec{B}$  更易于将  $\vec{M}$  排列,

则  $\vec{M}$  大。

居里定律: 给出了正确的  $T$  依赖关系

$$\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{B}_0$$



现在知道并非严格正确，只在  $\vec{B}_0 \rightarrow 0$  是正确的

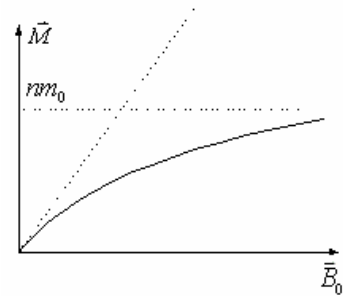
$$\chi_m = \frac{C'}{T} = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H \rightarrow 0}$$

此为居里定律的现代形式。原始形式在高场处不正确

$\vec{B} \rightarrow \infty$  所有的  $\vec{m}_0$  均被拉向  $\vec{B}$  的方向

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{V} = n \vec{m}_0 \quad n \text{ 为单位体积内的原子数}$$

$\vec{m}_0$  为单原子的磁矩， $\vec{M}_{\max} = n \vec{m}_0$  称为体系的饱和磁矩。



### 非线性磁介质

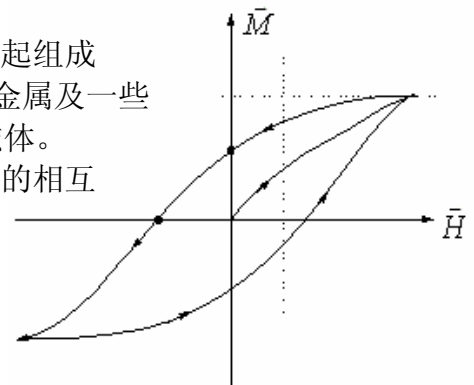
#### (3) 铁磁体

元素周期表中的许多原子都有磁性，但当它们放在一起组成固体时通常却不显示出磁性。只有 Fe, Co, Ni 等 3 金属及一些 4f 金属在固体状态时显示出磁性，这种体系叫做铁磁体。为什么有些固体有磁性，有些没有呢？原子磁矩之间的相互作用有如下几种：

- a) 温度带来的涨落不利于  $m$  之间互相平行
- b) 量子效应交换耦合 (Heisenberg 最早提出的) 利于互相平行

$$b < a, \quad \text{顺磁性} \quad M(B=0) = 0$$

$$b > a, \quad \text{铁磁性} \quad M(B=0) \neq 0$$



铁磁体的典型的磁化曲线如右上图所示，具有如下特征：

- 1)  $M(B \neq 0) \neq 0$ ，即有剩余磁矩（自发磁化）

$$\vec{M}(\vec{H} \rightarrow \infty) = \vec{M}_{\max} = n \vec{\mu}_\infty \quad (\text{饱和磁矩})$$

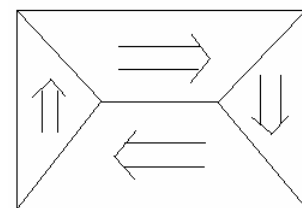
- 2) 磁化与过程有关，即形成磁滞回线，反向磁场达到超过一个特定数值时，才能将磁矩反转（矫顽场）。

矫顽场的物理是体系在一个磁场下可能存在两个态：与磁场平行的态为稳态，与磁场反平行的状态为亚稳态。因为各向异性的存在，加反向磁场时体系仍处于亚稳态（即与磁场反平行）的状态，只有当反向磁场达到一个阈值时，亚稳态才完全失稳，磁矩反转。

- 3) 为什么有  $\vec{M}$  由 0 到  $\vec{M}_{\max}$  的过程？这是因为有磁畴的存在。

在磁畴内有剩余磁矩，但宏观平均下来为 0，但与顺磁性不同。

注意：在铁磁体内  $\chi_m$  无意义，非线性介质  $\vec{M}/\vec{H}$  不是常数，而且依赖于历史，给



定历史路径可以定义  $\chi_m(H) = \frac{M}{H} \leftarrow$  有效磁化率

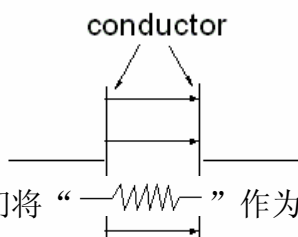
## 第 36 章：电感

电磁感应效应的一个重要应用是制作电感---重要的电工器件。

### 一、自感

对比： 电容——贮存静电能的容器；          电感——贮存磁能的容器。

典型器件：螺线管



我们将 “” 作为电感的标记。



$i$  稳恒时，器件内有均匀  $\vec{B}$

$i$  变化时，根据法拉第定律，将产生电动势产生  $\varepsilon$

定义自感：  $|\varepsilon| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$      $L$  即为自感系数，为正。

### 考虑电动势的符号：

当  $\frac{di}{dt} > 0$  时，根据 Lenz 定律， $\varepsilon$  阻碍螺线管内磁场变大趋势，即驱动一个与

原电流方向相反的电流，则  $\varepsilon < 0$ ；反之，当  $\frac{di}{dt} < 0$  时，根据 Lenz 定律，易知  $\varepsilon > 0$ 。

综上：  $\boxed{\varepsilon = -L \frac{di}{dt}}$ ，此即自感系数  $L$  的完整定义

### 如何计算电势：

根据电动势的定义：  $\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$ ，其中  $\vec{E}_k$  为非静电电场（感应场）；

电势产与静电场有关：  $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}_s \cdot d\vec{l}$ ；

根据全电路的欧姆定律：  $\rho \vec{j} = \vec{E}_k + \vec{E}_s \Rightarrow i r_{内} = \varepsilon - \Delta V$ ，其中  $r_{内}$  为电感器的内阻。

### 结论：

1) 若忽略电感元件的内电阻，则  $\varepsilon = \Delta V$ ；

2) 对理想元件  $V_b - V_a = -L \frac{di}{dt}$ ;

3) 电路计算中可以把实际电感看成一个理想电感元件与内阻的串联。

**如何计算 L?**

根据 Faraday 定律

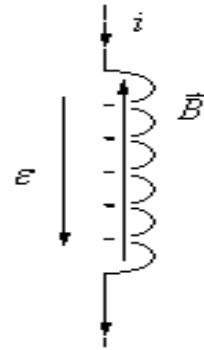
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Nd\phi_m}{dt}$$

另一方面, 根据电感的定义

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

则  $L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow L = N \frac{d\phi_m}{di} = N \frac{\phi_m}{i}$

因此,单匝线圈的电感即为通过此线圈的磁通量与电流之比。

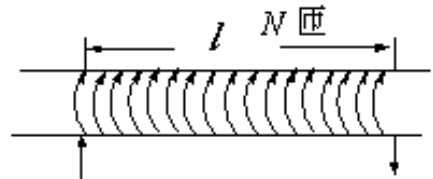


**例 1:** 求密绕长螺线管的自感系数

解: 已知管内的磁场为  $\vec{B} = \mu_0 ni$  (均匀)

则磁通量为:  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 niA$

则自感系数为:  $L = N \frac{\phi_m}{i} = \mu_0 nAN = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 \Omega$



由此可知,对于长直螺线管,其自感系数  $L \propto n^2$ , 及正比于总体积。

原因:  $n \leftarrow N$  线圈产生的  $\vec{B}$  场

$n \leftarrow \vec{B}$  场同时又穿过  $N$  个线圈

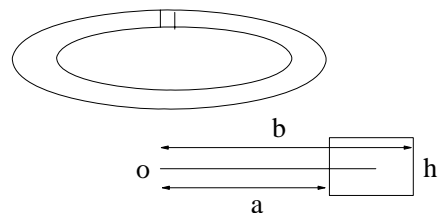
**例 2.** 螺绕环的自感

如图所示, 螺绕环中间为磁导率  $\mu_r$  的磁介质, 截面为矩形, 总匝数为  $N$ , 求  $L$ ?

解: 先求磁场  $\vec{H}$ , 由  $\vec{B} = \mu_r \vec{H}$ , 再求  $\vec{B}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i = Ni = 2\pi r H(r)$$

$$H(r) = \frac{Ni}{2\pi r}$$



对于线性介质,

$$B(r) = \mu_0 \mu_r H(r) = \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r}$$

$$\text{单匝磁通量 } \phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r} dr \cdot h = \frac{\mu_0 \mu_r N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = N \frac{\phi_m}{i} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 d}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

当  $b, a \rightarrow \infty$  时, 螺绕环的自感系数  $L$  应回到螺线管的形式。

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{a+b-a}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a} \quad (\because (b-a) \ll a)$$

$$L \Rightarrow \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h (b-a)}{2\pi a} = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A}{l} = \mu_0 \mu_r n^2 l^2 \frac{A}{l} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

此即螺线管的自感系数  $L$ 。

## 二、互感

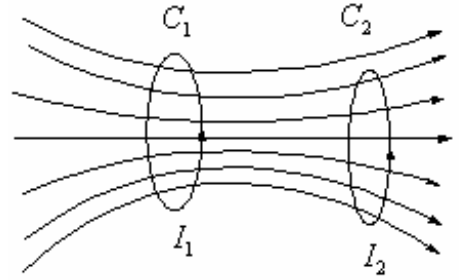
如右图所示的, 两个线圈  $C_1, C_2$ , 分别通有  $I_1, I_2$  电流

$I_1$  产生的  $\vec{B}_1$  不仅有通过  $C_1$  的磁通量  $\Psi_{11}$

还有通过  $C_2$  的磁通量  $\Psi_{21}$

$I_2$  产生的  $\vec{B}_2$  不仅有通过  $C_2$  的磁通量  $\Psi_{22}$

还有通过  $C_1$  的磁通量  $\Psi_{12}$



当  $I_1$  变化时, 不仅在  $C_1$  中产生感应电动势  $\varepsilon_{11}$  (自感)

还在  $C_2$  中产生感应电动势  $\varepsilon_{21}$  (互感)

如何计算  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}$ ?

显然

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}, \text{ 正比于 } \frac{dI_1}{dt}, \text{ 定义为 } \varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow M_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dI_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \text{ 正比于 } \frac{dI_2}{dt}, \text{ 定义为 } \varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow M_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{dI_2} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

可以证明  $M_{21} = M_{12} = M$ , 此即为互感系数,  $M$  依赖于器件具体的几何结构。

在环中产生的总感应电动势

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

——电工学方程。

注意：自感通常只与自身结构有关，互感强烈依赖于相对位置和相对的几何结构。

**例 3.** 如图所示，有两嵌套的螺线管  $C_1$ ， $C_2$ 。其长度分别为  $l_1$ ， $l_2$ ，单位长度上的匝数分别为  $n_1, n_2$ ，螺线管  $C_1$  的截面积为  $A$ 。

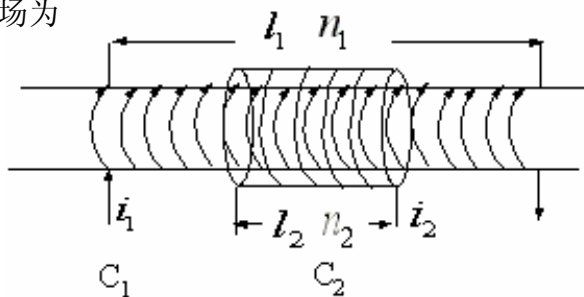
求：其互感系数  $M$ ？

解：（1）假设在  $C_1$  中通以电流  $i_1$ ，其产生的磁场为

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1$$

通过  $C_2$  的总磁通  $\Psi_{21} = n_2 l_2 \cdot (\mu_0 n_1 i_1) \cdot A$

$$M_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dI_1} = \mu_0 n_1 n_2 l_2 A = \mu_0 n_1 n_2 V_2$$



（2）也可假设在  $C_2$  中通电流  $i_2$ ，其产生的磁场  $\vec{B}_2 = \mu_0 n_2 i_2$ ，通过  $C_1$  的总

磁通为  $\Psi_{12} = n_1 l_1 \cdot (\mu_0 n_2 i_2) \cdot A$

$$M_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{dI_2} = \mu_0 n_1 n_2 V_2$$

显然，其结果相同，互感系数只与电路本身的性质有关。

习题：P. 842, Problems, 2, 4, 6

P. 839, Exercises, 9, 10