第二十二讲

复习：

- Hall 效应，探测载流子浓度及符号的重要的实验手段。换一个角度看欧姆定律，对各向同性体系有：$\vec{E}=\rho\vec{j}$。然而有垂直磁场时，$\left.\begin{cases}E_y=\rho_0 j_y\\E_x=\rho_H j_y\end{cases}\right\}\Rightarrow\vec{E}=\vec{\rho}\vec{j}$，$\vec{\rho}=\begin{pmatrix}\rho_0 & \rho_H\\ \rho_H & \rho_0\end{pmatrix}$为一个张量。其中$\rho_0=\dfrac{m}{q^2 n\tau}$为纵向电阻率（由正常的杂质散射提供），$\rho_H=\dfrac{B}{qn}$为横向电阻率（由磁场提供）。

- 磁偶极子 $\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}$（与电偶极子一一对应）

- 电磁感应定律：$\boxed{\varepsilon=-\dfrac{d\phi}{dt}}$ ，$\phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$

  $d\vec{S}$ 变：动生；$\vec{B}$ 变：感生

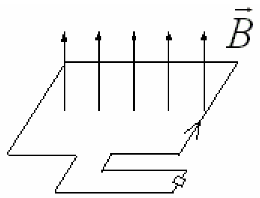
- 动生ε的例子：直流电源

---

② 交流电动势（发动机）

将一个线圈以任意角度放置于均匀磁场中， 则磁通量为

$\phi_m=BS\cos\theta$，其中θ为线圈垂直方向与磁场的夹角。



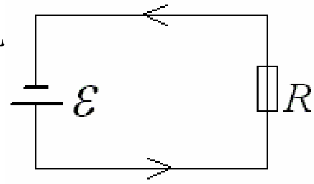
假设$\theta(t)=\omega t$，即线框以角速度ω旋转（外力驱动）

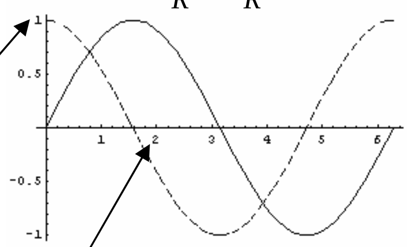
则 $\phi_m(t)=BS\cos(\omega t)$

根据 Faraday 定律 $\varepsilon=-\dfrac{d\phi_m}{dt}=BS\omega\sin(\omega t)$

$\Updownarrow$

若外接R，则产生电流 $i=\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{BS\omega}{R}\sin(\omega t)$，此即交流发电机



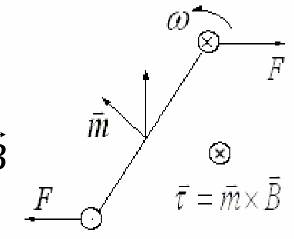


ϕ最大,ε最小

ϕ最小,ε最大

注意：能量守恒及转化

电流的损耗为 $P_R = i^2 R = \frac{\varepsilon^2}{R}$， 输出功率由外界能量提供（风，水……）。考虑我们这个发电机，如果一开始 $\dot{\theta} = \omega$ 匀速，置于 $\vec{B}$ 中，



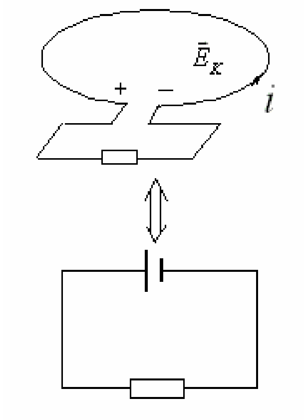
是否其为永动机？否！线圈受到磁场作用力：$\overrightarrow{F_B} = i\vec{L} \times \vec{B}$

产生力矩 τ，方向为阻碍圆周运动 $\Rightarrow \ \omega \downarrow \ \Rightarrow \ \varepsilon \downarrow$

一定要有外力矩克服此阻力，才能源源不断供电。

思考：（1）试证明要维持线圈做匀速转动外界所做的功就等于回路中的焦耳热。

（2）若加外力使得一个线圈在磁场中匀速转动，此时撤掉外力，求线圈中电流如何变化？体系中的能量是如何转化的？



（五）动生电动势的物理实质

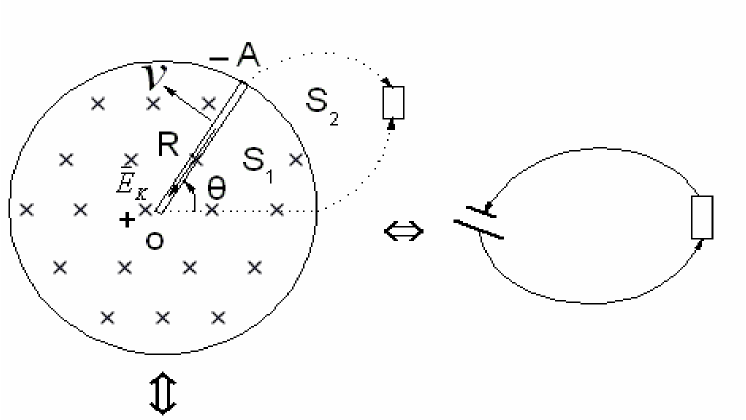
电动势是外力做功的能力。一定存在非静电力等效场，

$$\varepsilon = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

激发动生电动势时的 $\overrightarrow{E_k}$，其本质是什么？

举例讨论： 如图所示，求当 OA（$\dot{\theta} = \omega$，角速度为 ω）作圆周运动时，OA两端的电动势？

解法 1：



将 OA 连接形成闭合回路，$\overrightarrow{S_1}$ 的方向指向纸面向外

$$\phi=-B\cdot S_1=-\frac{BR^2\theta}{2}$$

$$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}=\frac{BR^2\dot{\theta}}{2}=\frac{BR^2\omega}{2}\quad EMF\text{ 由 }A\text{ 指向 }O$$

解法 2：

OA棒中的电荷以$\vec{v}(\vec{r})=r\omega\overrightarrow{e_\theta}$运动, 所受洛伦兹力为

$$\overrightarrow{F_B}=q\vec{v}\times\vec{B}=-qr\omega B\hat{e}_r$$

OA中有一非静电等效场 $\overrightarrow{E_K}=\frac{\vec{F}}{q}=-\omega Br\hat{e}_r$

注：$\overrightarrow{E_K}$与r有关

$$|\varepsilon|=\left|\int\vec{E}_K\cdot d\vec{l}\right|=\left|\int_0^R\omega Brdr\right|=\frac{1}{2}\omega BR^2$$

方向与$\overrightarrow{E_K}$的方向一致， A指向O

两种方法结果一致，

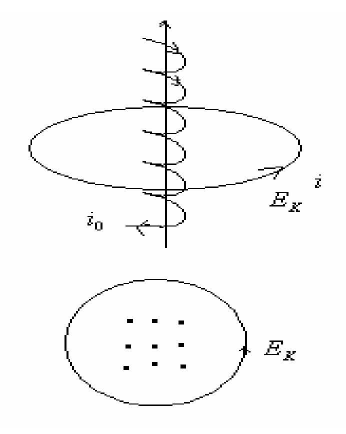
$\boxed{\text{图像清晰}\ \overrightarrow{E_K}=\vec{v}\times\vec{B}\Leftrightarrow\text{电动势（非静电等效力就是洛伦兹力！）}}$。

好处：（ 1 ）无需假设回路形状；（ 2 ）清楚地知道电动势（非静电力）的具体分布！比如连接外接负载，则 A 就是电池的负极， O 就是电池的正极。

（六）感生ε的物理实质

特点： $d\vec{S}$不变，$\vec{B}$变。$\frac{d\vec{B}}{dt}\neq 0$，此时没有 Lorenz 力，$\overrightarrow{E_k}$的来源？对动生$\varepsilon$来讲$\overrightarrow{E_k}=\vec{v}\times\vec{B}$ ，动生电场只存在切割$\vec{B}$的导体中；

对感生ε来讲，$\overrightarrow{E_k}$的来源是？



实验举例：

（1）如右图所示，闭合环路内在交变磁场下有感应出电流 i（当i_0变小$\vec{B}$变小时），对称性告诉我们：

$\overrightarrow{E_k}$应在导体内部处处相等（不同于动生ε），

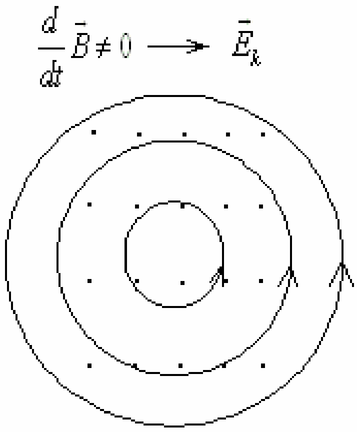
此处没有任何其他来源（$\vec{v}\times\vec{B}$ 不存在！!）

结论 ：$\overrightarrow{E_k}$ 应当是电场，但不同于静电场，我们称之为非静电场。

（2）当我们改变环路半径，电流仍然存在$\Rightarrow$ $\overrightarrow{E_k}$ 依然存在

可以设想在空间假如充满电荷，若 $\frac{d}{dt}\vec{B}\neq 0$ ，即 $\vec{B}$ 场变化时，可以看到电荷旋转。

因此 $\frac{d}{dt}\vec{B}\neq 0\rightarrow \vec{E}_k$



变化磁场导致某种非静电电场

此电场的特征：

$$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint \overrightarrow{E_k}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{d}{dt}\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

对比静磁场

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

结论：此电场 $\overrightarrow{E_k}$ 和静磁场 $\overrightarrow{B_S}$ 非常相似，为有旋无源场

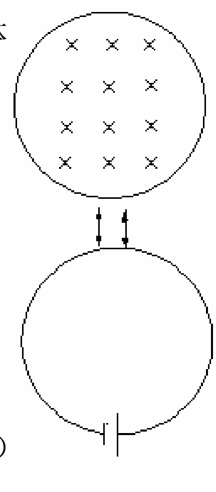
$\vec{B}$ 起源于电流 $\vec{J}$，而 $\overrightarrow{E_k}$ 起源于 $-\frac{d}{dt}\vec{B}$。

<u>几点讨论</u>

① 只有保守场才可以定义势，电荷产生的静电场是保守场，满足：

$\oint \overrightarrow{E_S}\cdot d\vec{l}=0$，因此可以定义势： $V_b-V_a=-\int_a^b \overrightarrow{E}\cdot d\vec{l}$ 。

由变化磁场 $\dot{\vec{B}}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{E_k}$ 非保守场，不能定义势 V，其环路积分不为 0 ，贡献的是电动势：$\varepsilon=\oint \overrightarrow{E_k}\cdot d\vec{l}$ 。



但 $\overrightarrow{E_{静}}$，$\overrightarrow{E_k}$（起源于 $\dot{\vec{B}}$， $\vec{v}\times\vec{B}$）均可作用于电荷 q，因此导体的载流子受到他们的共同作用，产生电流：

$\vec{J}=\sigma(\overrightarrow{E_{静}}+\overrightarrow{E_k})$，这就是所谓的全电路欧姆定律。

上式正是我们前面指出的
“电磁感应 $\Leftrightarrow$ 串联电动势”的微观基础。

② “感生”及“动生”电动势的异同。

同：都使得回路的磁通量发生了变化，从而产生了电动势

异：对动生 ε，$\overrightarrow{E_k}$ 只存在于切割磁力线的导体中（$\vec{v}\times\vec{B}$）

对感生 ε，$\overrightarrow{E_k}$ 存在于空间各处

第 35 章：磁介质

到现在为止我们只研究了真空中的磁场，那么磁场在介质中的行为如何？可以从对比电场在电介质中的行为得到启发。研究电介质中的电场时，电偶极子 $\vec{p}$ 是关键：$\overrightarrow{E_0} \Rightarrow \vec{P} \Rightarrow q_p \Rightarrow E_{\vec{P}}$，然后反馈回去修正介质中的场。那么磁介质中是什么在起作用？从前面的学习中我们已猜到答案：磁偶极子

（一）$\vec{m}$ 与 $\vec{P}$ 的深入对比

① 都是对外场的响应

② 受力

$\vec{p}$ 在 $\vec{E}$ 中	$\vec{m}$ 在 $\vec{B}$ 中
（转动）$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$
（平动）$\vec{F} = p\nabla E_Z$，	$\vec{F} = m\nabla B_Z$ (可以严格证明)
（电势能）$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$（磁偶极子在磁场中的有效相互作用能）

注意:

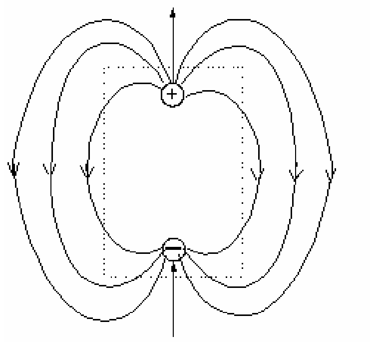
a) *如何证明载流线圈在磁场中的受力$\vec{F} = m\nabla B_Z$？（提示：可先计算一个放置于非均匀磁场的矩形载流线圈的受力，在线圈面积极小时利用高斯定理（$\nabla \cdot \vec{B} = 0$）可将受力减化为$\vec{F} = m\nabla B_z$；对任意形状的载流线圈，可以将其分成一个个的矩形线圈，再求总受力。* ***有能力的同学自己证明****）*

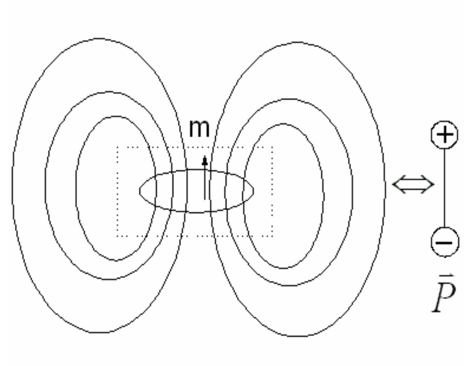
b) *转动自由度：* $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad dW = mB\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ *（质心不动），同时对平动自由度：*$\vec{F} = m\nabla B_Z$*，（*$\vec{B}$ *非均匀时），积分可得：*$U = -mB_z$ *（无转动）。统一可得：*$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ *。*

c) $\vec{B}$ *是非保守场，为什么可以定义势？*

$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ *只能对*$\vec{m}$ *作为一个整体不变时成立*

③ $\vec{P}$ 与 $\vec{m}$ 产生的场





"有效磁荷"的概念

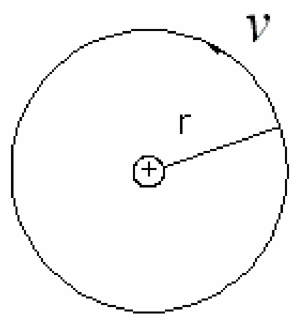
不考虑源区，在空间远离 $\vec{p}$，$\vec{m}$ 处的场的形式一样

(二) 磁介质对外磁场的响应

（1） 轨道磁矩的起源（准备知识）

原子中电子受原子核的吸引力绕原子核作圆周运动，等价于一个载流导线，产生的磁矩为

$$\mu = i\pi r^2$$



其中电流为

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{|e|}{T} = \frac{|e|\cdot v}{2\pi r}$$

则

$$\mu = \frac{|e|\cdot v}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \frac{|e|vrm}{2m} = \frac{|e|}{2m}p\cdot r = \frac{|e|}{2m}l$$

其中$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$为轨道角动量。

$$\mu = \frac{|e|}{2m}l \qquad \text{磁矩正比于角动量}$$

经典情况l可取任意数，在量子力学中，l 只能取分立值$l = n\frac{h}{2\pi}$（h是普朗常数）

$$\mu = \frac{|e|h}{2m\cdot 2\pi}n = n\mu_B \qquad \mu_B = \frac{|e|h}{4\pi m}\text{为玻耳磁矩}$$

玻耳为了解释氢原子的光谱，提出了轨道运动的量子化，为量子力学的最终建立打下了坚实的基础。

习题：P798， Problems， 6，8，10，14
P795， Exercises, 18
P820, Problems, 2
选作（课件中的斜体思考题部分）