第 8 次课 (质心，质心系中的动量，变质量系统) 2007.9.28

质心： 位矢 $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n$ $M = \sum_{n=1}^{N} m_n$ 质心系的总质量

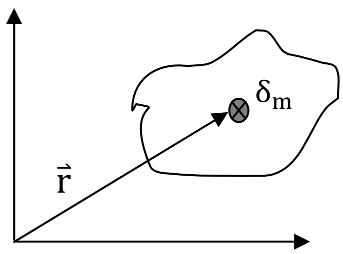
Center of Mass

速度 $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{v}_n$

加速度 $\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{a}_n$

合外力作用在质点系上导致系统质心的运动状态变化

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$



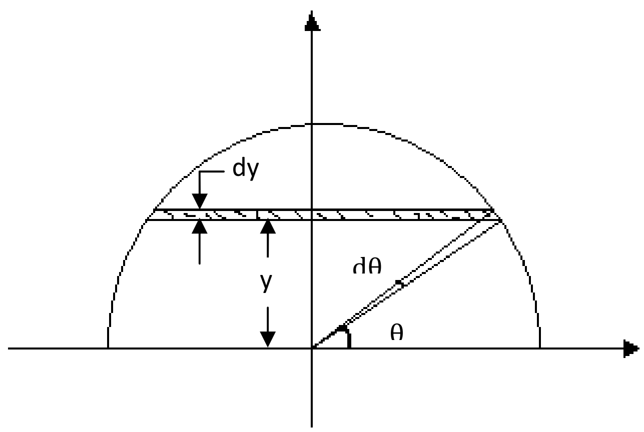
对于刚体 质心 $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m\to 0}\sum \vec{r}\delta m = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int zdm$$

例题：求密度为ρ， 半径为 R 的匀质半圆盘的质心。



解：分析对称性 得 $x_{cm} = 0$,求 y_{cm}

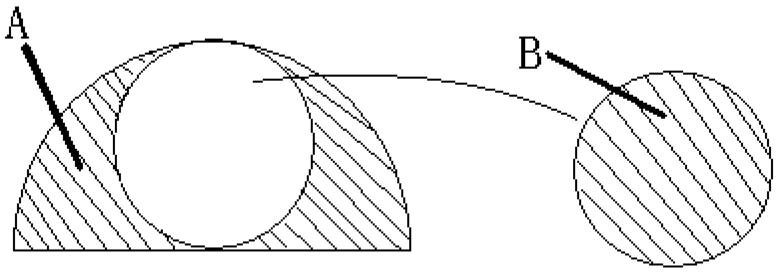
在 y 距离取一宽度为 dy 的质量微元 $dm = \rho ds = \rho 2R\cos\theta dy$

两个变量θ和y，转化成一个变量$y=R\sin\theta$

$$dy=dl\cos\theta=R\cos\theta d\theta$$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\rho 2R^3\cos^2\theta\sin\theta d\theta=\frac{4}{3\pi}R$$

例题：如图在半圆中挖去一个圆，求留下部分 A 的质心y_A？



C=A+B 半圆

解决问题思路：原则上通过质心积分公式求得，但实际计算中微元选取较困难。

1） 挖去部分 B (质心y_B)添回 A 构成半圆 C (质心y_C)

2） y_B, y_C容易求得，已知

3） $y_C=\dfrac{m_A y_A+m_B y_B}{m_A+m_B}\rightarrow$ 从中解得y_A！

质心系中总动量：$$\underbrace{\vec{P}=\sum_{n=1}^{N}m_n\vec{v}_n=M\cdot\underbrace{\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N}m_n\vec{v}_n}_{\vec{v}_{cm}}=M\vec{v}_{cm}}_{\text{相当于所有质点的质量集中在质心时质心的动量}}$$

在质心系中系统的总动量：

$$\begin{aligned}\vec{P}'&=\sum_{n=1}^{N}m_n\vec{v}'_n=\sum_{n=1}^{N}m_n(\vec{v}_n-\vec{v}_{cm})\\&=\sum_{n=1}^{N}m_n\vec{v}_n-(\sum_{n=1}^{N}m_n)\cdot\vec{v}_{cm}\\&=M\vec{v}_{cm}-M\vec{v}_{cm}=0\end{aligned}$$

与上节课二体碰撞选择的特殊参考系(质心系)一样，质心系中系统的总动量为零。

变质量系统

一个主体在运动过程中有增加或减少质量现象 （如火箭，下落雨滴），该主体运动状态必然会受到质量变化的影响，对该主体其牛顿动力学方程？

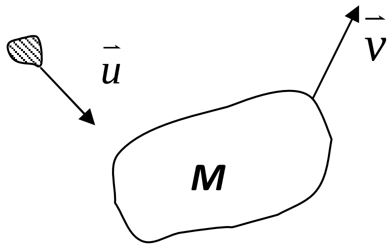
$\overline{P} = M\vec{v}$ 主体的动量变化 $\begin{cases} \vec{v}\ \text{变化} \\ \\ M\ \text{变化} \end{cases}$

是否我们直接从牛顿第二定律 $\dfrac{d\overline{P}}{dt} = \sum \overline{F}_{ext}$ 出发推导出

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overline{F}_{ext}$$ **错误！ 为什么？**

附体 ΔM 以 $\vec{u}$ 速度附着在主体 M(速度 $\vec{v}$)上 $\Rightarrow$ 一起运动 $\Rightarrow$ 碰撞问题

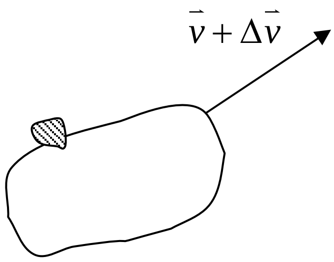
t 时刻(碰撞前)：



系统总动量

$$\overline{P}_i = \Delta M\vec{u} + M\vec{v}$$

$t + \Delta t$ 时刻 $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ (碰撞后)：



$$\overline{P}_f = (\Delta M + M)(\vec{v} + \Delta\vec{v})$$

碰撞前后动量变化量： $\Delta\overline{P} = \overline{P}_f - \overline{P}_i$

所以总动量变化率： $$\frac{d\overline{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\overline{P}}{\Delta t} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dM}{dt} = \sum \overline{F}_{ext}$$

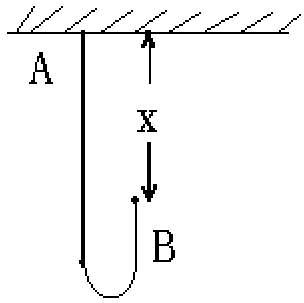
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_{ref}$$

主体动力学方程： $$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overline{F}_{ext} + \vec{v}_{ref}\frac{dM}{dt}$$

主体运动状态变化(加速度)不仅来源于外力，还有一项**附体对主体的影响**。

例题：长为 l，线密度为 ρ 的柔绳，原先 A、B 合并，A 点悬挂天顶如图所示，B 端自由下落。

求：B 端下落了 x 距离时，A 端所受的张力 F_T 。



解：1）参考系 ：垂直向下为正

2）A 端的受力分析

F_T

右半部绳充入左半部所引入的冲力 $v_{ref}\dfrac{dM}{dt} = f$

重力 W

3）主体牛顿方程：$\underbrace{M\dfrac{d\vec{v}}{dt}}_{=0} = \underbrace{(W - F_T)}_{=\sum F_{ext}} + v_{ref}\dfrac{dM}{dt}$

左端绳静止

$v = 0$，$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$　　　$F_T = W + v_{ref}\dfrac{dM}{dt}$

$$W = l' \cdot \rho \cdot g = \frac{l+x}{2} \cdot \rho g$$

主体长度

右端自由落体　$u = gt$　（$x = \dfrac{1}{2}gt^2$）$\rightarrow$　$u = \sqrt{2gx}$

$$r_{ref} = u - v = u = \sqrt{2gx}$$

$\dfrac{dm}{dt} = \rho\dfrac{u}{2}$　　m：单位时间内充入左边的质量，只有一半充入左边

u：单位时间下落的距离

$$F_T = \frac{\rho g(l+x)}{2} + \sqrt{2gx} \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{2gx}}{2} = \frac{\rho g}{2}(l+3x) \quad \begin{cases} x = 0, & F_T = \dfrac{1}{2}Mg \\ x = l, & F_T = 2Mg \end{cases}$$