

第三讲

复习:

- 不论对静电力还是静电场，我们遵循的逻辑都是 点电荷的结果（实验）+ 叠加原理（实验）
→ 多个电荷的结果 → 连续分布体的结果（三维，二维，一维）

- 场的定义及点电荷所产生的场强:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r$$

试探电荷， $q_0 \rightarrow 0$ （其产生的附加场不能影响到被探测场本来的行为）

$a_0 \rightarrow 0$ （可以明确定义 \vec{r} ）

- 线性叠加原理 → 连续体的电场：
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

4. 深入认识电场

1. 力与场的不同

我们在中学的学习中以及在《力学》的学习中非常熟悉力的概念。然而电场与静电相互作用力的不同：

$$\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{F}(\vec{r}) \quad \begin{array}{cc} q_1 \vec{r}_1 & q_2 \vec{r}_2 \\ \circ & \circ \end{array}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{12}$$

根据牛顿第三定律可知：作用力等于反作用力。然而对电场来讲，

$$q_1 \text{ 在 } q_2 \text{ 处的电场: } \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{\vec{F}_{21}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$q_2 \text{ 在 } q_1 \text{ 处的电场: } \vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

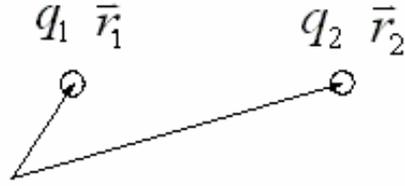
从以上两个等式可看出 $\vec{E}_1(\vec{r}_2) \neq -\vec{E}_2(\vec{r}_1)$ ，所以我们知道场与力是不同的。力与两个电荷有关，而场是隶属于一个电荷的内禀的性质。

2. 一个悖论（电荷对自身的作用）

考虑两个电荷的场，

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2)$$



由叠加原理，在空间任何一点 \vec{r} 处的电场为：

$$\vec{E}_{\text{总}}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}), \quad (26.4.1)$$

根据上式，则在 $\vec{r} = \vec{r}_2$ 处的电场为：

$$\vec{E}_{\text{总}}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_2) \quad (26.4.2)$$

(26.4.2) 式中的第二项趋向于 ∞ ！看受力：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q_0 \vec{E}(\vec{r}) \quad (26.4.3)$$

取观测点为 $\vec{r} = \vec{r}_2$ ，事实上我们可以把探测电荷就认为是处在 $\vec{r} = \vec{r}_2$ 点的

$q_0 = q_2$ ，代入 (26.4.3)，得

$$\vec{F}_2 = q_2 \vec{E}(\vec{r}_2) = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) + q_2 \vec{E}_2(\vec{r}_2) \rightarrow \infty \quad (26.4.4)$$

也就是说， q_2 所受的力趋向于 ∞ ！

但是之前我们已经知道：

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) \quad (26.4.5)$$

为有限值。

如何理解这个问题呢？

从表面看，(26.4.5) 与 (26.4.4) 的区别是 (26.4.5) 没有考虑自己对自己的力。然而问题是，为什么我们不算自己的场给自己的力呢？

5. 举例:

(1) 半径为 R 的均匀荷电环的电场

这个问题本质上仍为一维的，线电荷密度： $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$

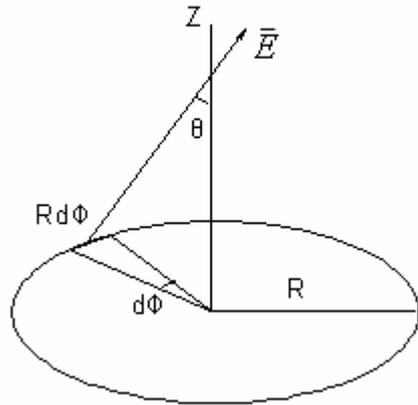
定义一微元，其总电荷： $q = \lambda R d\phi$ ，距观测点距离： $r = \sqrt{z^2 + R^2}$
环在观测点处产生的电场分量为：

$$E_z = |E| \cos \theta,$$

$$E_x = |E| \sin \theta \cos \phi,$$

$$E_y = |E| \sin \theta \sin \phi$$

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{(z^2 + R^2)} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z d\phi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z d\phi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (26.5.1)$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi R \cos \phi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi = 0$$

也可由对称性得知： $E_x = E_y = 0$

$$\text{假设 } z \gg R, \text{ 那么 } E_z = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{z^3} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

这就是点电荷的结果!!!

当 $z < 0$ 时， $E_z(-z) = -E_z(z)$ ，故最终结果可以由 (26.5.1) 统一描述。

(2) 均匀荷电圆盘

此为二维问题，面电荷密度是： $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ 取微元为 r 处的宽为 dr 的圆环，

它的总电荷量是： $q = 2\pi r dr \cdot \sigma$

把现在取的微元看成是之前讨论的电荷环分布的情况, 那么对应的电荷线分布密度为:

$$\lambda = \sigma dr$$

利用之前的结果, 得

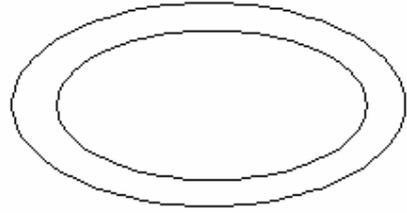
$$dE_z = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda rz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma dr \cdot rz}{2\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \int_0^R \frac{\sigma dr \cdot rz}{2\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \int_0^R \frac{\sigma z dr^2}{4\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \Big|_0^R = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \quad z > 0$$

(26.5.2)



如果不用之前的结果, 直接从点电荷的情况算起, 那么取一微元, 其电荷是:

$$q = rd\phi dr \cdot \sigma$$

利用点电荷场的公式得:

$$dE_z = \frac{\sigma rd\phi dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(z^2 + r^2)} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{\sigma rd\phi dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma rd\phi dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^R \frac{dr^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

下面来分析一下两种极限情况

a) $z \gg R$

利用 Taylor 展开,

$$\frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{z}{z \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{1/2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z} \right)^2 + \dots$$

则,

$$E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{2z^2} = \frac{\frac{Q}{\pi R^2} R^2}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad \text{--- 点电荷的结果。}$$

b) $z \ll R$

$$E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{R} \right] \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (26.5.3)$$

两种办法可以达到此极限:

(1) 或 z 有限 $R \rightarrow \infty$ (无限大圆盘);

在这个极限下, 我们发现

(i) 无限大带电平板电场与 z 无关!

(ii) 进一步, 因 $R \rightarrow \infty$ 时, E_z 与 x, y 亦无关

(圆盘没有中心, 或是任何一点都是圆心)。

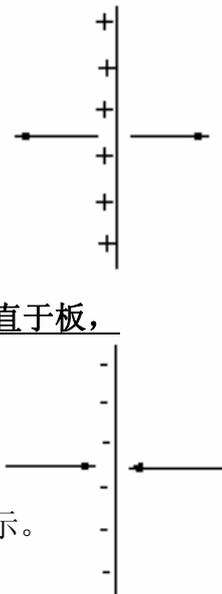
所以:

无限大带电平板产生的电场为理想的均匀电场, 方向垂直于板, 场强为 (26.5.3)

另, 根据对称性,

$$E_z(z) = -E_z(z)$$

据此, 我们可以得到均匀带电板的电场分布, 如右图所示。



(2) 或 R 有限 $z \rightarrow 0$ (参考点非常靠近一个有限尺寸的圆盘)

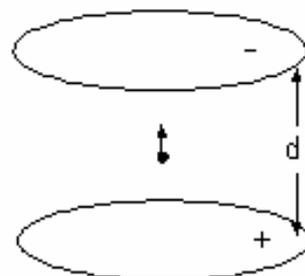
这种体系只有当参考点非常靠近圆心的一小部分区域, 电场才是均匀场。

(3) 两个平板分别荷电 $+, -$, 求其中心的场分布

解: 由线性叠加原理, 总电场沿 z 方向,

$$E_z(z) = E_+(z) + E_-(z)$$

带正电荷的板产生的电场:



$$E_+(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

带负电荷的板产生的电场：

$$E_-(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{d-z}{((d-z)^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

总电场：

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[2 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{d-z}{((d-z)^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时，

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [2] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

均匀电场与 z 无关是单板的 2 倍！

(4) 球壳状荷电体的电场

面电荷密度： $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ 。考虑任意一观测点，均可以通过坐标变换将其旋

转到 z 轴上，不失普遍性，我们可假设观测点在 z 轴。

取一环状微元，如图所示，定义

$$r = R \sin \theta \quad z = l - R \cos \theta$$

则微元带电量为 $\Delta q = \sigma R d\theta \cdot 2\pi R \sin \theta$

根据对称性，微元产生的电场仅有 z 分量。有：

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\sigma R d\theta \cdot R \sin \theta \cdot (l - R \cos \theta)}{[(l - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta \cdot (l - R \cos \theta)}{[l^2 + R^2 - 2lR \cos \theta]^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 d(\cos \theta) \cdot (l - R \cos \theta)}{[l^2 + R^2 - 2lR \cos \theta]^{3/2}}$$

定义 $x = \cos \theta$, 则,

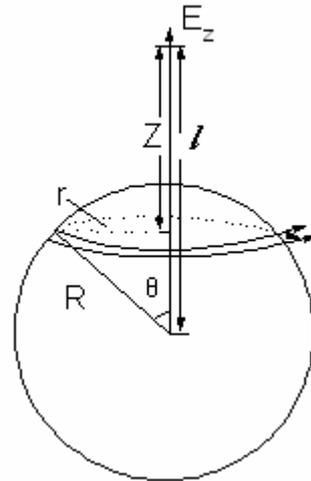
$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{(l - Rx) dx}{(l^2 + R^2 - 2lRx)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 (l - Rx) \frac{1}{Rl} d \left[\frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2 - 2lRx}} \right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 l} \left\{ \frac{l - Rx}{\sqrt{l^2 + R^2 - 2lRx}} - \frac{\sqrt{l^2 + R^2 - 2lRx}}{l} \right\}_{-1}^1 \quad (26.5.4)$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 l} \left\{ \frac{l - R}{|l - R|} \frac{|l - R|}{l} - \frac{l + R}{l + R} + \frac{l + R}{l} \right\}$$

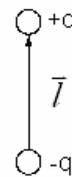
$$= \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 l^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l^2} & l > R \\ 0 & l < R \end{cases}$$



对均匀带电球壳，可以严格证明其内部的电场处处为 0！而外部电场与处于球心处的带有相同电量的点电荷产生的电场一致！但计算极其繁复！

从这里我们可看出高斯定理的重要性！

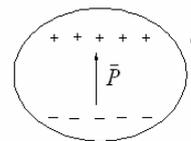
(5) 偶极子电场 dipole



1. 什么是偶极子？ 定义 $\vec{P} = q\vec{l}$

2. 为什么研究偶极子？

- ① 介电物质在电场下的响应即是形成偶极子
- ② 任意电荷分布，



最低阶贡献为点电荷： $Q = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r}$

高一阶的贡献就是偶极子：

$$\vec{P} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d\vec{r}$$

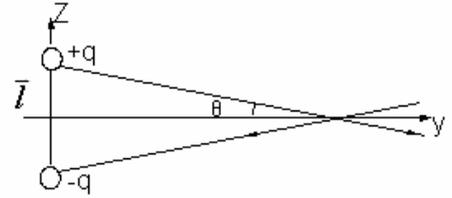


3. 偶极子的电场

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z \neq 0, < 0$$

$$+q \text{ 产生的电场: } E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\text{而 } |\vec{E}_-| = |\vec{E}_+|,$$



$$\text{故 } E_z = -2 \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \times \sin\theta = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{l}{2}}{\left[y_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \approx -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y_0^3}$$

以上结果是在 $l \ll y_0$ 的情况下简化的。

$$\vec{E}(0, u, 0) = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 y^3} \quad (26.5.5)$$

偶极子的电场 $\sim \frac{1}{r^3}$ ，而电荷的贡献 $\sim \frac{1}{r^2}$ ，因而偶极子的贡献比电荷的贡献更快衰减。

(六) 电力线

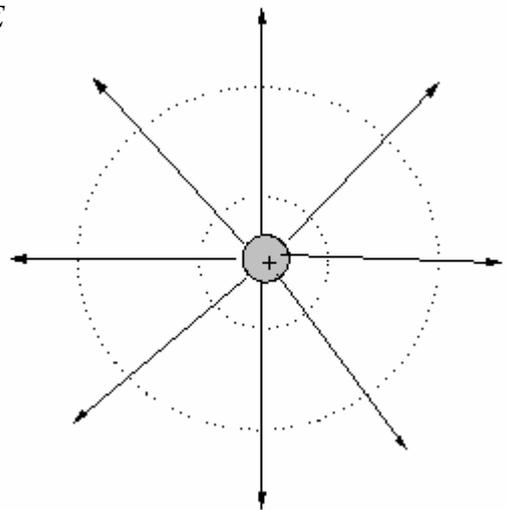
如何表征 $\vec{E}(\vec{r})$? 法拉第发明了电力线的方法来形象地表征电场。

电力线定义：① 电力线的切线方向 $\parallel \vec{E}$

② 电力线数密度 $\propto |\vec{E}|$

$$(1) \text{ 点电荷 } \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (-\vec{e}_r)$$

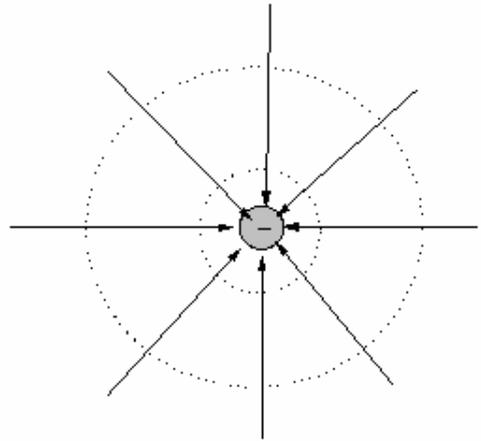


$$\frac{N_r}{4\pi r^2} = E(\vec{r}) = \frac{q}{r^2}$$

$$N_r = \frac{q}{\epsilon_0}$$

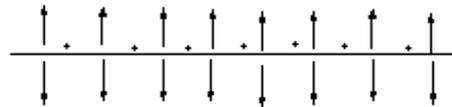
电力线的数目与 r 无关！也就是说：
电力线是连续的，

考虑到电力线的方向，有另一结论：
始于正电荷，终于负电荷

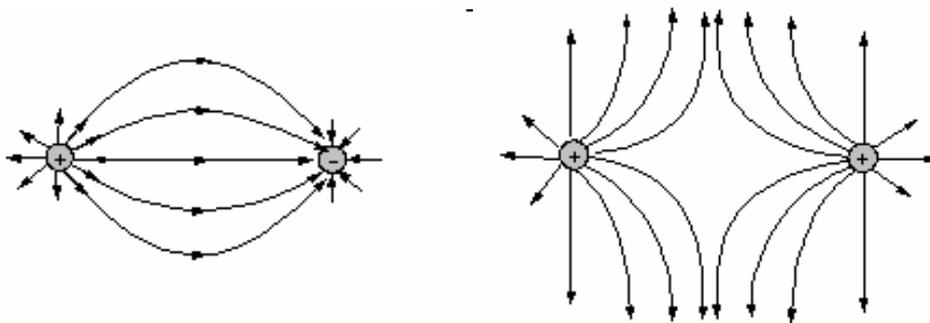


(2) 平板

它产生的电场是均匀电场



(3) 两点电荷的电场分布



- 靠近某一点电荷时，电力线行为由这个电荷唯一确定
 - 电力线连续，由+正电荷出发，到-电荷终止。
 - 没有负电荷，则电力线终止与无穷远。
- 这3个原则可以帮助我们画出任何电荷体系的电力线分布。

作业：

P609-610, Problems, 2, 4, 6, 8