第十九讲

上次课：

*　$\vec{F}_{21} = K\dfrac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times (I_1 d\vec{\ell}_1 \times \hat{r}_{21})}{|\vec{r}_{21}|^2}$　（安培定律）

$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{J}(\vec{r}')d\Omega' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$　（线性叠加原理）Biot-Sarvart 定律

$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$　（电流在磁场中的受力）

*　B-S 定律的应用

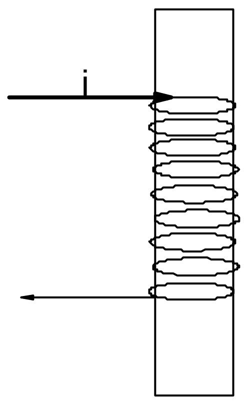
(1)　长直载流线：　$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi$

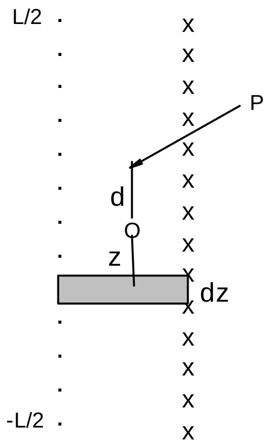
(2)　载流线圈：　$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3}$　　$\vec{m} = I\vec{A} \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{\ell}q$　　偶极子

(3)　两长截流线之间的相互作用力

----

(4)　螺线管





线圈电流 i，密度为 $n = \dfrac{N}{L}$，N 为总线圈数。求螺线管中心线上任意一点的磁场？

解：螺线管可以看作是 $N = n \cdot L$ 个通电线圈磁场的线性叠加。

已知单匝线圈轴线上的磁场为 $\dfrac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$

如图选取一段螺线管，dz 有 ndz 匝线圈，在观察点 P 处（距离原点 d）的磁场

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2}{2[R^2+(d-z)^2]^{3/2}} \cdot i \cdot ndz$$

则 P 点处的总磁场

$$B_z(d) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 inR^2}{2[R^2+(d-z)^2]^{3/2}}dz = \frac{\mu_0 niR^2}{2}\left.\frac{(z-d)}{R^2[R^2+(z-d)^2]^{1/2}}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L/2-d}{\sqrt{R^2+\left(L/2-d\right)^2}} + \frac{L/2+d}{\sqrt{R^2+\left(L/2+d\right)^2}}\right]$$

讨论几种特例情形：

a) $L \to \infty$， $B(d)=\frac{\mu_0 ni}{2}[1+1]=\mu_0 ni$

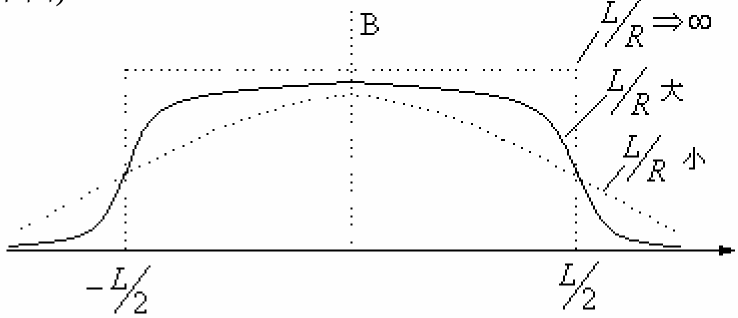
无限长螺线管在轴心上磁场均匀

b) $d=\pm\frac{L}{2}$ $B(d)=\frac{\mu_0 ni}{2}\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}\approx\frac{\mu_0 ni}{2}$ $(L>>R)$

c) $d\to\infty$，L 有限， $B\to 0$

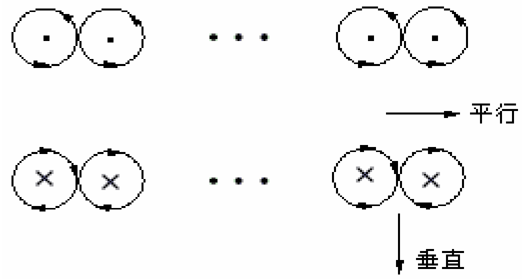
d) $R\to 0$，L 有限， $B=\begin{cases}\mu_0 ni & |d|<L/2\\ 0 & |d|>L/2\end{cases}$

(上述结论见下图)



L/R越大(细长)，螺线管内磁场越趋向匀强，这个行为与静电学中两无限大平行板产生均匀电场相对应。因此螺线管在静磁学中的地位（电感）与平行板在静电学中的地位（电容）相仿。

微观来看：
平行于螺线管方向的磁场分量相互增强
垂直于螺线管方向的磁场分量互相抵消



（五）磁场所满足的基本定理

静电学中，我们学到静电场满足环路定理（保守场）以及高斯定理（平方反比）。从数学上讲，对一个矢量场的完整描述需要知道该场的散度、旋度两种性质。对静磁场来说，它的散度（高斯定理）及旋度（环路定理）性质如何呢？

（1）环路定理：

电场：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\Leftarrow$ 保守场，向心力

磁场：$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}\neq 0,$ $=?$

回忆：无限长载流直导线产生的磁场为$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi$，绕电流画环路为半径 r

的圆（其方向为右手螺旋），则 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0 I$（此结论与 r 无关）。
进一步计算发现任意形状的曲线组成的闭合环路，

只要其包含此电流，则 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

否则： $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

推测：对一般情形（非无限长直导线）$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ 依然成立！？

可以严格证明：对稳恒电流有

$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{s}}$ ----- 安培定理

1〉可以由 B-S 定律严格推出 --- 超出本课程要求

2〉**条件是 I 为稳恒电流 （闭合回路）**，非稳恒电流条件下以后讨论

3〉S 可以为任意完整的曲面，$\oint d\vec{l}$ 为其边界形成的环路（右手螺旋）

（2） 高斯定理：

电场：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0$ $\Leftarrow$ $\vec{E}$ 与 $\vec{r}$ 满足平方反比，有电荷

磁场：$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = ?$ $\vec{B}$ 与 $\vec{r}$ 满足平方反比，但无磁荷！

可以严格证明：$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \equiv 0}$ --- 高斯定理

（只要求不存在磁单极，不要求稳恒电流）

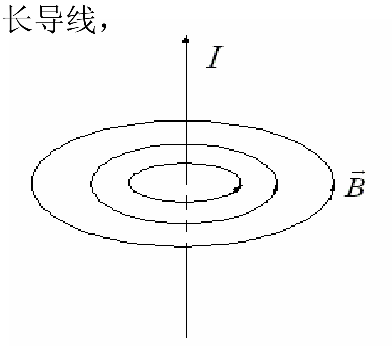
总结：电场是有源无旋场--电力线起于正点荷，止于负电荷，连续。

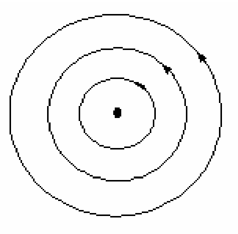
磁场是有旋无源场--磁力线首尾相接（高斯定理），围绕电流呈右手螺旋关系（环路定理）。

<u>几个实例</u>：

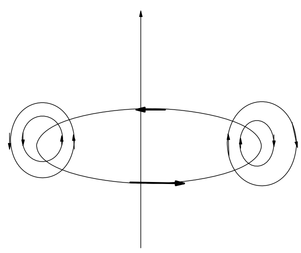
与电场线类似，我们可以根据磁场的基本性质画出几个典型体系的磁力线分布。

a）载流长导线，

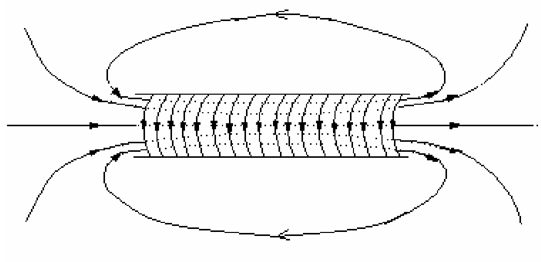




b）载流线圈



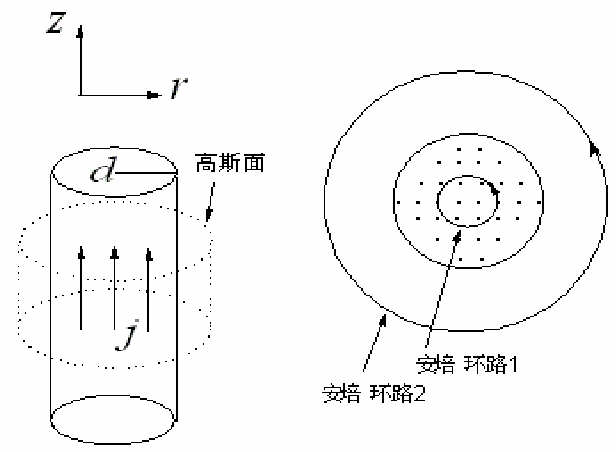
c）长螺线管

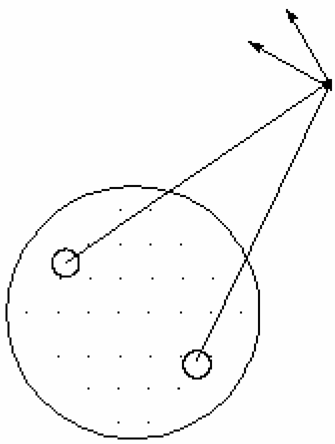


（六）安培定理的应用

电场为有源场，源电荷的性质都体现在高斯定理上，因此要利用到高斯定理求解。磁场为有旋场，旋的性质与电流有关，因此要用到安培定理求解磁场问题。举几个例子。

(1) 无限长半径为d的<u>**圆柱形均匀载流导线**</u>（电流为I）的空间磁场？





解：导体截面的电流密度为 $j = \dfrac{I}{\pi d^2}$

B 的大小：对称性，只与 r 有关。

B 的方向:

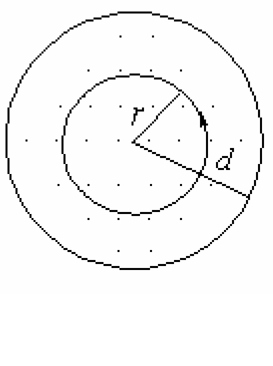
a) $B_z = 0$ ： $\vec{B}$ 场没有 $\vec{j}$ 上的分量，可以由 B-S 定律推得

b) $B_r = 0$ ： B-S 定律推知（选取关于轴心对称的两条电流，其产生的磁场的 r 分量相互抵消）

也可由高斯定理推知：

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow B_r(r)2\pi r h = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0$$

结论: B 场只有 $\hat{e}_\phi$ 分量，大小只与 r 有关。



$$r < d, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$$

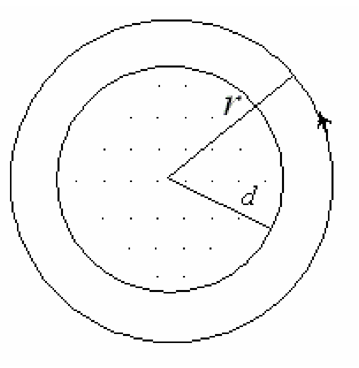
$$\mu_0 I = \mu_0 j\pi r^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2} jr = \frac{\mu_0 I}{2\pi d^2} r$$

$$r > d,\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$$

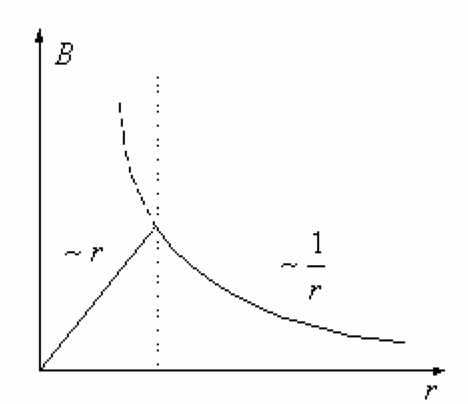
$$\mu_0 I = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$r > d$ 处，磁场分布完全等同于理想线电流的磁场。在静电学中，有限半径的带电导线是一维荷电线的真实对应，与此类似，有限大小的载流导线亦为理想线电流的真实对应。

理想线电流：$B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \to \infty \quad (r \to 0)$，非物理！



虚线：理想电流；实线：实际电流

思考：长度为 L 的线电流（I）的磁场为：

$$B(r) = \frac{\mu_0 IL}{4\pi r\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}\ ,$$

安培定理是否成立？

<u>（2）无限大均匀面电流</u>，

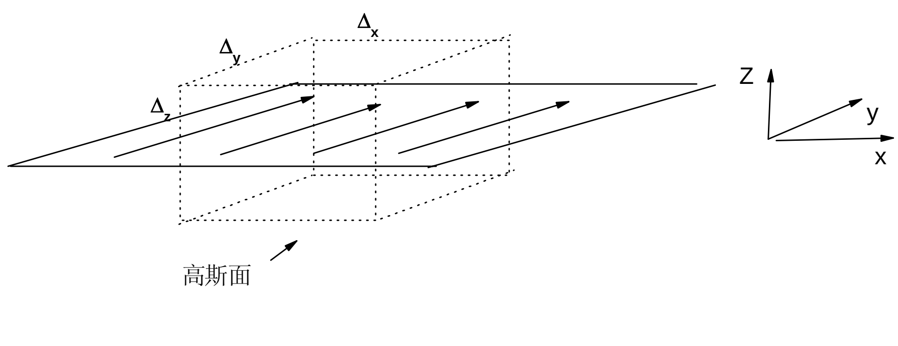
设其置于xy平面，面电流密度 J_s 沿y方向流，求其周围空间的磁场。

解：　$\vec{B}$ 的大小：　根据对称性，$\vec{B}$ 只与　z　有关

　　　$\vec{B}$ 的方向：

a）　$B_y = 0$　--- B 没有 j 上的分量，可以由 B-S 定律推得

b）　$B_z = 0$　--- 可由 B-S 定律推知（无限长体系，对称电流使得此分量相互抵消），

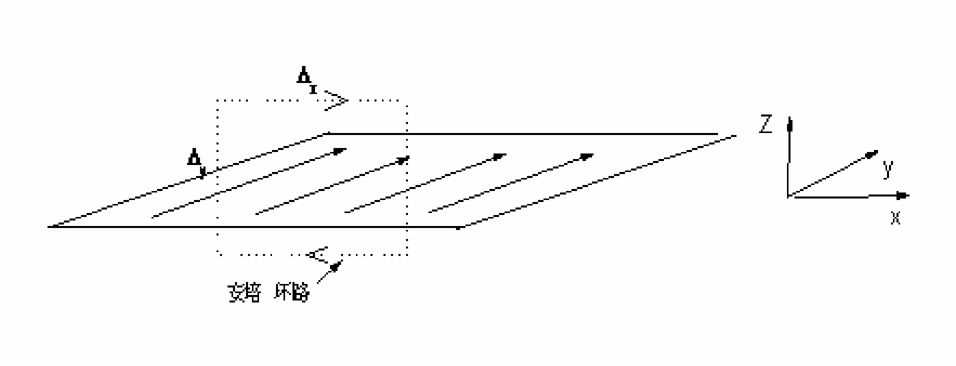


也可由高斯定理推知（设 z 方向上的厚度趋向于 0）：

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s}=0\Rightarrow B_z(z)S_{xy}=0\Rightarrow B_z(z)=0$$

c)结论；　只有 $\hat{x}$ 分量。另据对称性：$B_x(-z)=-B_x(z)$。

如图取安培环路：



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=B_x(z)\Delta_x-B_x(-z)\Delta_x=2B_x(z)\Delta_x$$

$$\mu_0 I=\mu_0 J_s\Delta_x$$

$$B_x(z)=\frac{\mu_0 J_s\Delta_x}{2\Delta_x}=\frac{\mu_0}{2}J_s$$

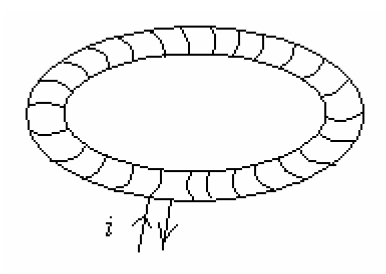
磁场为一理想的均匀场。对比无限大带电平面的电场：$E_z(z)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

也可以利用 B-S 定律先积分得到有限大板的结果（例 33-5），然后取极限。

$$B_x(z)==\frac{\mu_0 J_s}{\pi}\tan^{-1}(\frac{a}{2z})\rightarrow\frac{\mu_0 J_s}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 J_s}{2}$$

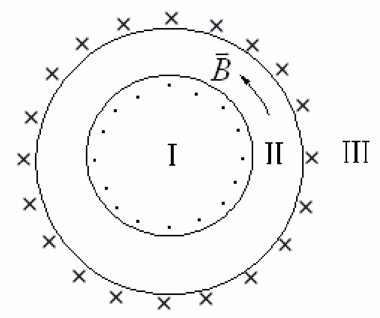
麻烦许多!!!

（3）螺绕环



单位长度上线圈匝数为 $n=N/2\pi d$，电流为 i，环的截面为半径为 R 的圆，求其周围空间的磁场？

解：根据对称性，B 只与 r 有关，方向沿 $\vec{e}_\phi$



I 区　$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$$

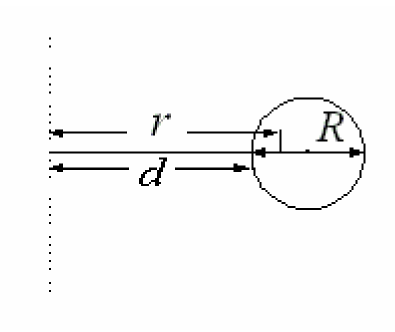
$$B\cdot 2\pi r=0$$

$$B(\vec{r})=0$$

II 区： $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$

$$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 iN$$

$$B(r)=\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$



III 区： $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$

$$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 iN-\mu_0 iN=0$$

$$B(r)=0$$

{磁场只存在于 **II** 区，环外磁场为 0 }

原则上讲，螺绕环内的磁场非均匀：$B(r)=\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$，依赖于 r.

考虑极限情况，$d\to\infty$， $N\to\infty$， $n=N/2\pi d$ 不变

此时 $B(r)=\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad\to\quad \frac{\mu_0 Ni}{2\pi d}=\mu_0 ni$ 完全均匀!

与 z， r 均无关! 且螺线管外的场为 0

在此极限下，（曲率半径无限大的）螺线环就变成了一个无限长的直螺线管，我们因此得到结论：无限长的直螺线管中的磁场处处均匀，为 $\mu_0 ni$；螺线管外磁场为 0。

（4）对无限长螺线管亦可直接求解：

$\vec{B}$ 的大小：与 z 无关，只依赖于 r ---- 对称性：

$\vec{B}$ 方向 $\| \hat{Z}$：

$\vec{j}\,\|\,\hat{e}_\phi \Rightarrow \vec{B}\neq\hat{e}_\phi$ （B-S 定理）

$B_r=0$ 可由高斯定理推知，也可由对称性相互抵消推知。

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$$

$$\Downarrow$$

$$B_{in}(r)\cdot b-B_{out}\cdot b=\mu_0 ni\cdot b$$

$B_{out}\equiv 0 \leftarrow$ 将参考点放置 ∞ 处，

则 $B_{out}(r \to \infty) \to 0$ （因正负电流相互抵消）

$B_{in}(r) = \mu_0 ni$ 亦与 r 无关，为一理想均匀磁场

思考：为什么要用螺线管？无限大平板电流也可以产生均强磁场？
因为后者磁场不能被限制在有限区域内
螺线管可以看作将平板电流卷起来。

习题：

1）对无限长载流直导线，证明其产生的磁场满足安培环路定理 --- 即对<u>任意形状</u>的曲线组成的闭合环路，只要其包含此电流，则 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ ，否则：

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

2）P. 771, Exercises, 34
3）P. 773, Problems, 12
4）P. 773, Problems, 14