第二讲

复习：**静电力**

- 电荷：正电荷（如质子）；负电荷（如电子）
- 电荷守恒：任何时刻，孤立系统内部正负电荷代数和恒定不变。

$$q = \pm n|e| \qquad e = 1.602\times10^{-19}C$$

- 导体和绝缘体

  导体——（内部）自由电荷；绝缘体——（内部）束缚电荷

- 库仑定律： $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12}$

  性质：向心力；平方反比；同性相斥，异性相吸；

4．叠加原理 （The principle of superposition）

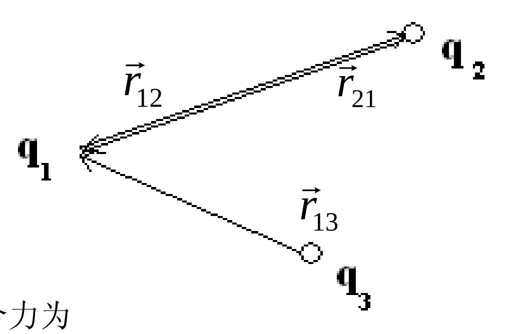
我们已知道了两个点电荷之间的静电力的形式---库仑定律。 若存在多于 2 个电荷，那情况怎样呢？

<u>(1) 点电荷</u>

如图所示，有三点电荷 q_1， q_2， q_3，根据库仑定律，2，3 分别对 1 的力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^{\ 3}}\vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^{\ 2}}\hat{r}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^{\ 3}}\vec{r}_{13}$$



作用在 q_1 上的合力？实验发现，作用在 q_1 上的合力为

q_2 和 q_3 单独对 q_1 的力的线性叠加，

$$\boxed{\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}} \qquad (25.4.1)$$

此即为静电力的<u>线性叠加原理</u>。

i） 静电力为两体相互作用，不因第三者的存在而改变

ii）前提条件：q_1， q_2 为点电荷，本身尺度 << r_{12}， r_{13}

若存在 N 个点电荷，则这些电荷作用在电荷 1 上的静电力为：

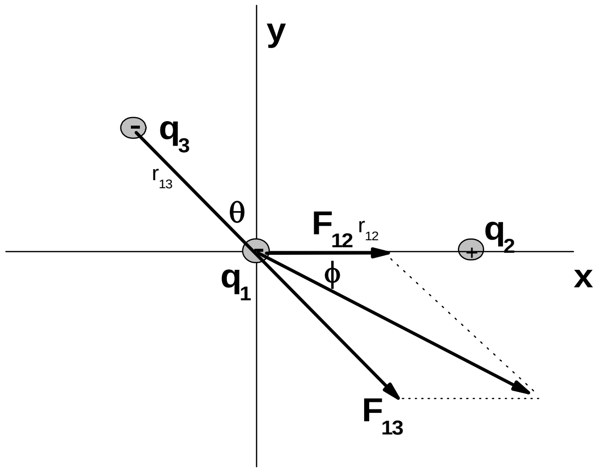
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1N} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=2}^{N}\frac{q_1 q_j}{r_{1j}^{\ 3}}\vec{r}_{1j}$$

$$\boxed{\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_1 q_j}{r_{ij}^{\ 3}}\vec{r}_{ij}} \qquad (25.4.2)$$

（注意：求和为矢量求和）

<u>例 1</u>．如图所示,有三个点电荷$q_1<0$，$q_2>0$，$q_3<0$,求q_1所受的力$\vec{F}$？

解：　　先求解 2，3 分别单独对 1 的力：



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12},$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^{\ 2}}\hat{r}_{13}。$$

根据叠加原理，合力为

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

求出合力的分量分别为

$$F_x = F_{12}^{\ x} + F_{13}^{\ x} = F_{12} + F_{13}\sin\theta$$

$$F_y = F_{13}^{\ y} = F_{13}\cos\theta$$

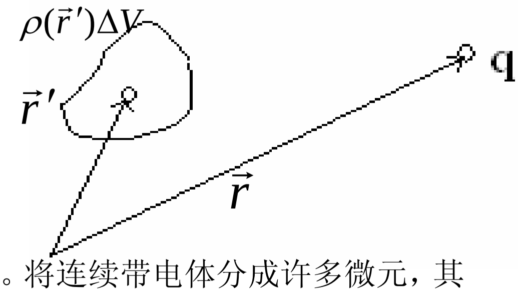
则合力大小为

$$|F| = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}$$

方向角满足 $\tan\phi = \left|\frac{F_y}{F_x}\right|$

<u>Tips：计算时要养成一丝不苟，注意范式的习惯</u>

<u>(2)．连续带电体</u>



考虑一个连续带电体对处于$\vec{r}$带电量为q的力。将连续带电体分成许多微元，其

中一个为处于$\vec{r}_2=\vec{r}\,'$带电量为$q_2=\rho(\vec{r}\,')\Delta V$的点电荷。这里$\rho(\vec{r}')=\left.\frac{\Delta q}{\Delta V}\right|_{\Delta V\to 0}$为电荷密度，而$\Delta V$为此微元的体积。 则根据库仑定律，这一微元（可以认为是电电荷）对q的力为

$$\Delta\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho(\vec{r}')\Delta V}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

根据线性叠加原理，整个带电体对q_1的静电力为这些微元的作用力的线性叠加

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\vec{r}'}\frac{q\rho(\vec{r}')\Delta V}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

当$\Delta V\to 0$，上述求和可以写成积分形式：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{q\rho(\vec{r}')d\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')}\qquad (25.4.3)$$

推广到电荷分布在一个 2 维面上（如球面，柱面等），或是分布在一维线（如带电棒，带电环等）的情形，得到此时q的受力为

二维电荷分布：$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{q\sigma(\vec{r}')dS'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')}\qquad (25.4.4)$$

一维电荷分布：$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{q\lambda(\vec{r}')dl}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')}\qquad (25.4.5)$$

其中$\sigma(\vec{r}')=\left.\frac{\Delta q}{\Delta S}\right|_{\Delta S\to 0}$为 2 维表面上的面电荷分布密度，$\lambda(\vec{r}')=\left.\frac{\Delta q}{\Delta l}\right|_{\Delta l\to 0}$为 1 维线上的线电荷密度。***思考：电荷总有一定的大小，怎么可能分布在面上，线上呢？***

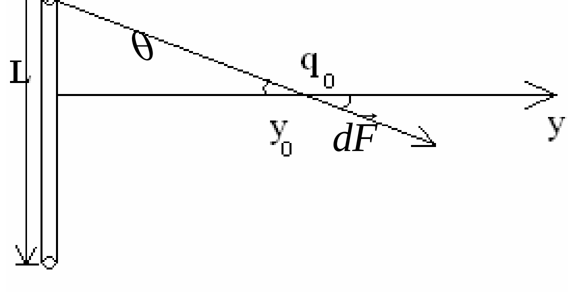
例 2总电荷Q均匀分布在长度为L的棒上，求距离棒中心y_0处的电荷q_0的受力？

解: 线电荷密度为$\lambda=Q/L$。

如图所示, 在棒上选取电荷元, 长度为dz

$q_1=q_0$ ， $q_2=\lambda dz$

$r_{12}=\sqrt{z^2+y_0{}^2}$



$$d\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\lambda dz}{z^2+y_0{}^2}\hat{r}_{12}$$

$$dF_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\lambda dz}{z^2+y_0{}^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0y_0\lambda dz}{(z^2+y_0{}^2)^{3/2}}$$

$$dF_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\lambda dz}{z^2+y_0{}^2}\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0z\lambda dz}{(z^2+y_0{}^2)^{3/2}}$$

$F_z=\int dF_z=0$ (根据对称性，或者直接积分)

$$F_y=\int dF_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{q_0y_0\lambda dz}{(z^2+y_0{}^2)^{3/2}}=\frac{q_0y_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0y_0{}^2}\frac{z}{(z^2+y_0{}^2)^{1/2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

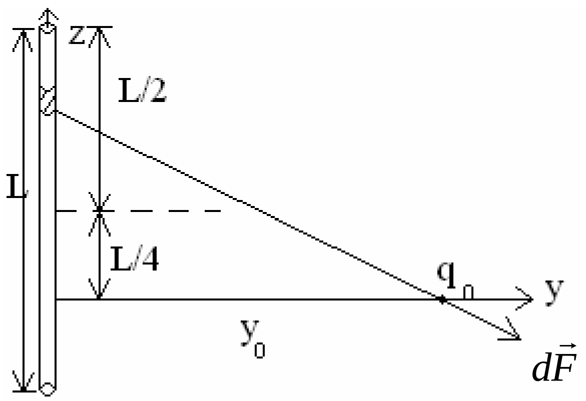
$$=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0y_0}\frac{L}{(\frac{L^2}{4}+y_0{}^2)^{1/2}}=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0y_0}\frac{1}{(\frac{L^2}{4}+y_0{}^2)^{1/2}}$$

检验正确性：$y_0>>L$ 时，$y_0{}^2+\frac{L^2}{4}\approx y_0{}^2$。我们得到：

$$F_y=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0y_0}\frac{L}{y_0}=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0y_0{}^2}$$

棒看上去自身尺度可以忽略，可视为点电荷。

<u>思考：如果q_0不放在棒的中垂线上</u>？（物理思考：当观测点距离远大于带电体尺度时---〉点电荷！ 能否证明？）



$$F_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/4}^{3L/4}\frac{q_0y_0\lambda dz}{(z^2+y_0{}^2)^{3/2}}=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0y_0}\frac{z}{(z^2+y_0{}^2)^{1/2}}\Bigg|_{-L/4}^{3L/4}$$

$$=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left\{\frac{3L/4}{\left[(3L/4)^2+{y_0}^2\right]^{1/2}}+\frac{L/4}{\left[(L/4)^2+{y_0}^2\right]^{1/2}}\right\}$$

当 $y_0 >> L$ 时，$F_y \approx \frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\frac{3L/4}{y_0}+\frac{L/4}{y_0}\right)=\frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 {y_0}^2}$

$$F_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/4}^{3L/4}\frac{q_0\lambda z dz}{(z^2+{y_0}^2)^{3/2}}=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2(z^2+{y_0}^2)^{1/2}}\Bigg|_{-L/4}^{3L/4}$$

$$=\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\left[(3L/4)^2+{y_0}^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[(L/4)^2+{y_0}^2\right]^{1/2}}\right\}$$

当 $y_0 >> L$ 时，$F_z \approx 0+O(L/y_0)^2$

因此，远处看仍可近似视为点电荷。其他分布可以类推，不再赘述。

Tips：每一道题目都可以试图深入思考，从不同的角度理解物理原理

第 26 章：静电场

1. 什么是场？

例如：温度场；引力场

气功 $\Leftarrow$ 能用场定义研究，也就不是伪科学了

场的性质：具有动量，能量，场是传递相互作用力的一个媒介

武侠小说:《天龙八部》中萧锋的降龙十八掌，《小李飞刀》中的气场

2. 静电场

我们可以利用库仑定律计算静电相互作用力，原则上所有问题都可以解决，为什么要费力引入场的概念？事实上，***引入场不仅是为了计算方便，更重要的是场是一种客观存在。***

静电力是不是通过场发生的相互作用？历史上有分歧

电荷 q_1 $\overset{\text{超距}}{\Longleftrightarrow}$ 电荷 q_2 错

电荷 q_1 $\Longleftrightarrow$ 电场 $\Longleftrightarrow$ 电荷 q_2 对

为什么电荷之间的作用是通过电场而非超距作用？

静态分析分辨不出其间的分别，动态则不然。q_1 的扰动以一定的速度c被 q_2 感

知，因此并非超距作用，这是因果关系的体现！！！学到后来越来越清楚，场是脱离电荷的一个客观存在！

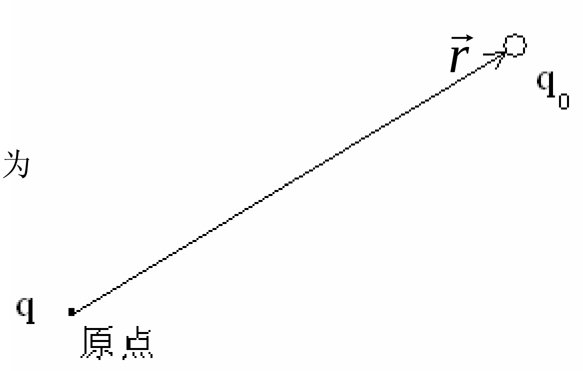
3. 静电场的定义

a）. 点电荷的电场

原点的q在$\vec{r}$点的电场$\vec{E}(\vec{r})$：在$\vec{r}$点放一个试探电荷q_0

（***其尺度及电量均趋于 0***），其受力为$\vec{F}(\vec{r})$

定义： $\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\vec{F}(\vec{r})/q_0}$ (26.3.1)



因为$\vec{F}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_0}{r^2}\hat{r}$，所以点电荷的电场为

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}} \qquad (26.3.2)$$

<u>小心！场不满足牛顿第三定律</u>。考虑q_1，q_2处于$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$

q_1对q_2的力 $\vec{F}_{21}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$

q_2对q_1的力 $\vec{F}_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$ $(\hat{r}_{12}=-\hat{r}_{21})$

$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ —— <u>牛顿第三定理</u>

q_1对q_2的电场 $\vec{E}_1=\vec{F}_{21}/q_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$

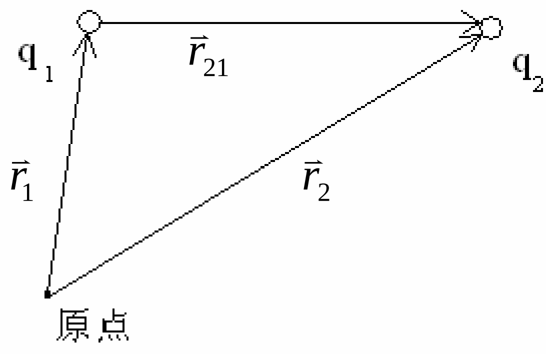
q_2对q_1的电场 $\vec{E}_2=\vec{F}_{12}/q_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$ (注意：$\vec{E}_1\neq-\vec{E}_2$)

b）. 线性叠加原理

q_1，q_2处于$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$,它们在$\vec{r}$处的电场？在$\vec{r}$处放一个试探电荷q_0

q_1对q的力 $\vec{F}_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_0}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)$

q_2对q的力 $\vec{F}_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2q_0}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2)$



静电力满足叠加原理

$\vec{r}$ 处 q_0 受的合力为 $\vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{r}$ 处的总电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2)$$

注意: 场不依赖于试探电荷,所以才叫做试探电荷.

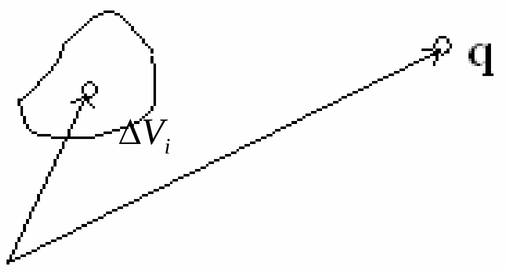
c）. 推广到 N 个电荷

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots + \vec{E}_N(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) + \cdots + \frac{q_N}{|\vec{r}-\vec{r}_N|^3}(\vec{r}-\vec{r}_N)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad (26.4.3)$$

d) 连续电荷分布的电场



在 $\vec{r}_i$ 处取一电荷元 $q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$，它激发的电场为

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)$$

总场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\xrightarrow{\Delta V_i \to 0} \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad (26.4.4)$$

(注意矢量性！)

这里直接用到了场的叠加原理,而没有用试探电荷.

同理，对 2 维面电荷分布及 1 维线电荷分布的连续带电体，电场为

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\lambda(\vec{r}\,')dl}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad （26.4.5）$$

注意:

- 场是自然存在的，和试探电荷无关;
- 场更本质，受力则依赖于试探电荷的大小.
- $\vec{F} = q\vec{E}$ $\vec{E}$ 的单位: N/C (常用单位:V/m)

习题：

P 583-584 Exercises：2, 16, 26

P 585 Problems: 2, 4, 8, 10