第十五讲

复习：

* 电容贮能 $U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2$

① 重复计数修正
② 变力做功平均

* 两个表达式对应不同的外界条件

$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ------ 通常对应孤立体系（因此电荷恒定）

$\frac{1}{2}CV^2$ ------ 通常用在定压条件下（能量由源供给）

* 另一表达式 $\mu(r)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2$ ------ 静电能密度

本课程由平板电容器推出 ← 《电动力学》中有更完整的推导
静电学 两者完全等价！
电磁波 后者正确 ⇐ （即使是瞬态过程）

第 31 章：直流电路

静电学（electrostatics）	电荷静止不动 $v=\dot{r}=0$
直流电路（D.C. Circuit）	电荷不再静止，电流方向不随时间变化
交流电路（A.C. Circuit）	电流方向随时间变化

直流电路研究的对象是电流，我们将研究有 R（电阻），C（电容）情况下的电流。电流的载体是导体，前面学习了导体组成的两种元器件，R，C，电介质不能载流，但可以增加电容。

（一） 回顾电流的基本概念

① $i=\frac{dq}{dt}$ ⇐ 单位时间通过一定导体截面的电荷

$i=\int\vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{s}$ 电流密度

② $\oint_{\Delta v}\vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{s}=\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int\rho(\vec{r},t)d\vec{r}$ 电荷守恒

稳恒条件下 $\dfrac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)=0$

$$\oiint_{\Delta v}\vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{s}=0 \quad \Rightarrow \quad i_1=i_2=i$$

③ $\vec{j}(\vec{r})=\sigma\vec{E}(\vec{r})$ $\qquad \sigma=\dfrac{ne^2}{m}\tau$

$\vec{E}(\vec{r})=\rho\vec{j}(\vec{r})$

$V=RI$ $\qquad R=\rho\dfrac{L}{A}$ $\qquad R$：阻碍电荷流动的能力

对比 $C=\varepsilon_0\dfrac{A}{L}$ $\qquad C$：贮存电荷的能力

④ 能量耗散 $\Leftarrow$ （新的部分）

$\vec{E}=\rho\vec{j}$

电场对电荷一直做功，但电流恒定不变，电荷带的机械能没有增加，电场得功到哪儿去了？事实上这些功被晶格振动，杂质运动等带走了，变成了环境的热能！此过程即为耗散 dissipation。定量考虑：

单位时间场对电荷的做功

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{\ell}}{dt}=q\vec{E}\cdot\vec{V}$$

dt 时间内，$d\Omega$ 体积内外场对电流的做功为（计 W 是电场对电流做的总功）

$$\frac{dW}{dtd\Omega}=nq\vec{v}\cdot E=\vec{j}\cdot\vec{E}$$

将上式对整个电阻内积分，单位时间电场对 R 中电流做的功

$$\frac{dW}{dt}=\int\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}=j\cdot E\cdot A\cdot d=I\cdot V$$

注意： 此处用到了 $j\cdot A\rightarrow I, E\cdot d\rightarrow V$

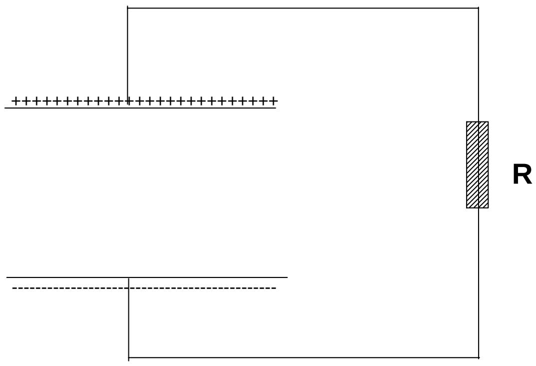
进一步，根据能量守恒，这部分功一定是以热能的形式被环境带走，即

$$\frac{dQ_{heat}}{dt}=\frac{dW}{dt}=I\cdot V$$

（二）<u>电动势</u>　$\leftarrow$　研究稳恒电流的先决条件

（1）　为什么要引入电动势

如果没有任何的非静电源，电流不能稳恒



用导线连起电容两极，即有电流 i，电荷由高电势板流到了低电势处

电荷变少 $\Rightarrow$ 电压 α, Q 变少 $\Rightarrow$ 电荷仍由 ΔV 驱动

最终：　$Q = 0, \Delta V = 0, i = 0$

从能量角度，

存在 C 中的总电能为　$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

单位时间耗散在 R 中的电能　$\frac{dW}{dt} = i^2 R$　变成环境的热能

没有别的能量来源　　$U \to 0$

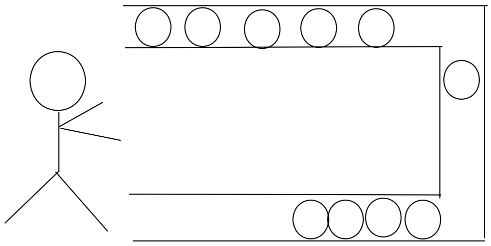
$$i \to 0$$

思考：若是超导体如何？

（2）　什么是电动势

非静电机制将正电荷由负极移到＋极

用“ε”来表示电动势



电动势的种态： 化学能（电池），太阳能，机械能

目的： 将＋电由低电势→高电势

大小： $\varepsilon = \dfrac{dW}{dt}$ 移动单位电荷所付出的外界能量

ε：有电压的量纲，伏特

但不是由静电场产生的，非静电力产生的

ε 大，可以维持高的电压

ε 小，不能高，只能低

电动势 ε 是维持电流稳恒的先决条件

* 从电荷来讲，电压能被维持（补偿电荷）

* 从能量来讲，I^2R 不能被补偿 $\Rightarrow$ 耗散成热能！非可逆过程

（三）电路分析原则

（1）基本原则

原则 1 kirchhoff (基尔霍夫) 第一定律 $\Sigma i_{\text{流入}} = \Sigma i_{\text{流出}}$

$\Updownarrow$ 任意节点

微观基础 $\oiint_\Omega \vec{j}\cdot d\vec{s} = -\int_\Omega \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\cdot d\vec{r}$ 电流-电荷守恒

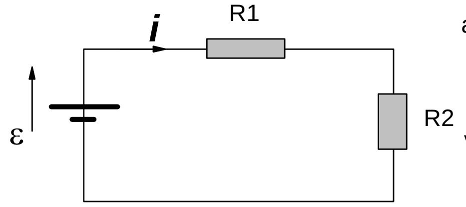
直流情况： $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ （一开始的瞬态除去）， 有 $\oiint_V \vec{j}\cdot d\vec{s}=0$，则对任意一个节点，电流必守恒（流入=流出）

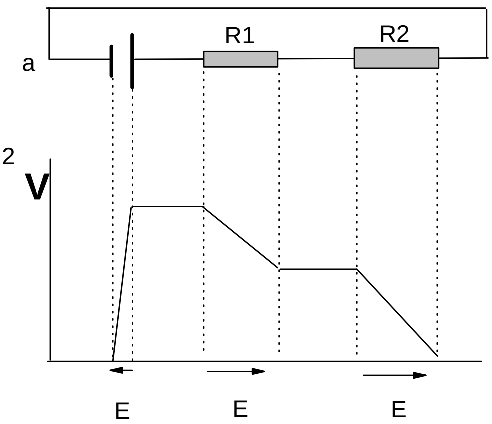
原则 2 kirchhoff 第二定律: 将电源包括在里面，环电路任一闭合回路一周电势差为 0

这个原则的微观本质是静电场的环路定理： $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ ，导致电势 $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$，进而 $V_a - V_a = 0$。

求解电路问题即时利用上述 2 个原则，在确定外部电动势的前提下，计算电路中的电流电压分布。

例子





在电路中的静电场及电势分布如同所示。
（i）电路只有一个 Loop，所以应用 Kirchhoff 第一定律容易得到电流处处相等。
（ii）应用 Kichhoff 第二定律将求解电流-电势差的关系：
由 b 点（电源的正极）开始，回到 b

$$V_b - V_c = iR_1$$

$$V_c - V_a = iR_2$$

这两段电势差与电流的关系容易得到，即导体中的欧姆定律， 问题是：

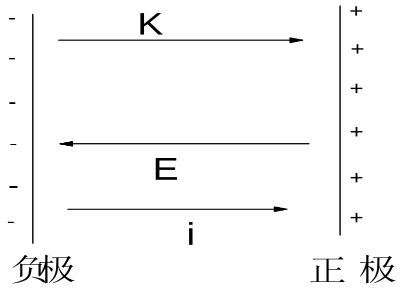
$$V_a - V_b = ?$$

即电源内的电势-电流的关系是如何？只有得知了上面的这个关系，我们才能完全解决一个电路。

要回答这个问题，必须建立电源内部的欧姆定律。

（2）欧姆定律在电源里的形式

简单的分析发现欧姆定律在电源内部不成立。比如如下图所示的电源，电源内部电场的方向是由正极指向负极，如果把电源作为欧姆介质处理，不假思索的应用欧姆定律，则电流为 $i = \dfrac{V_b - V_a}{r}$，方向由正极流向负极（假设载流子带正电）。



然而真实的情形却是电流在电源内部由负极流向正极！电流的方向与电场反向！

欧姆定律 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ 不成立！电源是欧姆介质吗？电源里的能量如何转化的？

回忆：电导（阻）的推导

$$\dot{\vec{V}}_d=\frac{\vec{F}}{m}-\frac{\vec{V}_d}{\tau}$$ --- 电荷的运动是由外部驱动力与散射力共同驱动的

稳恒电流：$V_d=\dfrac{\tau}{m}F=\dfrac{q\tau}{m}E$

然而后一个等号在只有静电力下才正确！

在电源这一特殊的媒质中，驱动力 $\vec{F}$ 可以不仅仅是静电场力 $q\vec{E}$，还可以由其他来源-非静电等效力。

要解决这个问题，需引入等效非静电场 $\vec{K}$。由电动势的定义（从负极移动单位电荷到正极的过程中，外部非静电力所做的总功），知道

$$\varepsilon=\frac{\Delta W}{\Delta q}=\int_{-}^{+}\frac{\vec{F}_{ex}}{q}\cdot d\vec{l}=\int_{-}^{+}\vec{K}\cdot d\vec{l}$$

$\vec{K}=\vec{F}_{ex}/q$ 为非静力等效场。则在电源中，电荷的运动是由静电力与非静电力的合力驱动的：

$$\vec{F}=q\vec{E}+\vec{F}_{ex}=q(\vec{E}+\vec{K})$$

故：

$$\vec{V}_d=\frac{q\tau}{m}(\vec{E}+\vec{K})$$

解之可得电流

$$\vec{J}=nq\vec{V}_d=\frac{nq^2\tau}{m}(\vec{E}+\vec{K})=\sigma(\vec{E}+\vec{K})$$

注意到 $\vec{K}\parallel(-\vec{E})$ （电动势的方向总是由-极指向+ 极），可得电源内的欧姆定律

$$\boxed{\vec{E}+\vec{K}=\rho\vec{J}}$$

- **理想电源** $\rho=0$ （没有杂质晶格散射带走能量，即没有内电阻）

$$\vec{E}+\vec{K}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{K}\equiv-\vec{E}$$

$$\boxed{\varepsilon=\int_{-}^{+}\vec{K}\cdot d\vec{l}=-\int_{-}^{+}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot d\vec{l}=V_{+}-V_{-}}$$

- **非理想电源** $\rho=$ 有限 （电流流过电源内部时有损耗发生）

$$\vec{E}+\vec{K}=\rho\vec{j}$$ （K > -E ， $\vec{j}$ 与 $\vec{K}$ 同向）

左：$\int_a^b(\vec{E}+\vec{K})d\vec{l}=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_a^b\vec{K}\cdot d\vec{l}$

$=V_a-V_b+\varepsilon$

右：$\frac{\rho\cdot L}{A}\cdot J\cdot A=r\cdot i$ （内电阻）

$$\boxed{V_b-V_a=\varepsilon-ir}$$ ← 微观证明

$\Downarrow$ $\Downarrow$

静电场 外非静电力

<u>此为电源作为一特殊电学材料的本构方程！</u>

电流反向，则：$V_\varepsilon=V_b-V_a=\varepsilon+ir$，

此即为什么电动势方向不依赖于电流方向的微观基础。

回到刚才的例题，

$$V_a-V_b=-\varepsilon+ir$$

解之可得

$$\varepsilon=i(R_1+R_2+r)\Rightarrow i=\varepsilon/(r+R_1+R_2)$$

注意：基尔霍夫第二定律的本质是静电场的保守力性质

与有无电动势并无关系，

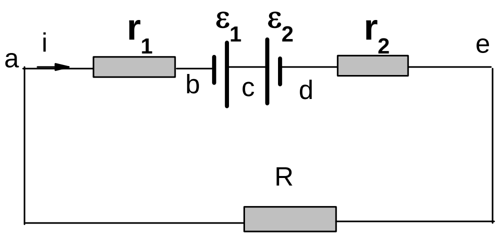
电动势的加入仅仅是将 $V_b - V_a = \varepsilon$ *由外界条件确定下来而已*

（3）例题

总结：<u>电路分析原则</u>

① 设定电流方向
② 根据电流守恒得到电流之间的关系式
③ 选定一闭合回路，　到用 I 定 V，i 关系式
　a 在电流之间电压下降
　b 经过电动势 $- \longrightarrow +$ 上升

例 1：



求 $i, V_a, V_b, V_c, V_d, V_e$

解：基尔霍夫第一定律　　i 处处相等

基尔霍夫第二定律

由 a 出发，　$-ir_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - ir_2 - iR = 0$

$$i(r_1 + r_2 + R) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$　方向正确

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$　$i < 0$　方向与所设相反

$$V_a - V_b = ir_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + R}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

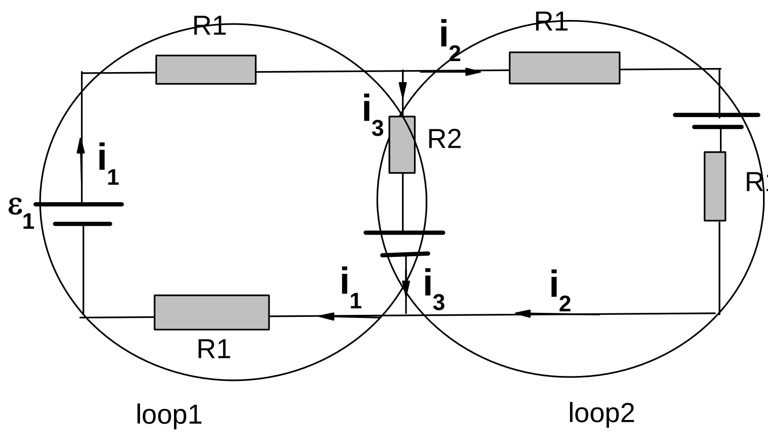
$$V_b - V_c = -\varepsilon_1$$

$$V_c - V_d = \varepsilon_2$$

$$V_d - V_e = ir_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + R}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$V_e - V_a = iR = \frac{R}{r_1 + r_2 + R}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

例 2：求解电路



$i_1 = i_2 + i_3$ kirchhoff 第一定律

$\varepsilon_1 - i_1R_1 - i_3R_2 - \varepsilon_2 - i_1R_1 = 0$ $\Leftarrow$ LOOP1 用 kirchhoff 第二定律

$-i_2R_1 - \varepsilon_2 - i_2R_1 + \varepsilon_2 + i_3R_2 = 0$ $\Leftarrow$ LOOP2

$$i_3 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2(R_1 + R_2)}$$

$$i_2 = \frac{R_2}{4R_1(R_1 + R_2)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$i_1=\frac{R_2+2R_1}{2R_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2(R_1+R_2)}=\frac{2R_1+R_2}{4R_1(R_1+R_2)}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

尽管取了不同的定义及方向，结果完全一样

（4）电路中的电场

有任一电路：

* $t=0$ 没有电荷分布，没有 $\vec{E}$ 在电路中 $\rho(r)=0$ $\vec{E}(r)=0$

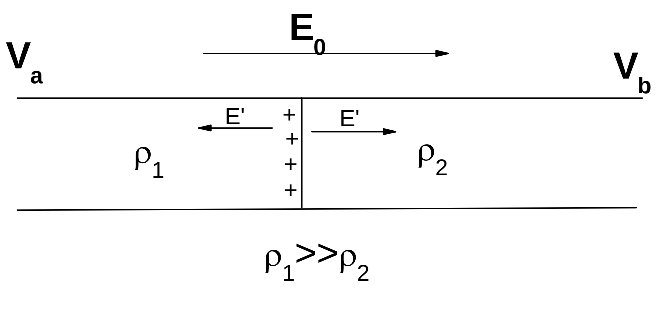
* $t\to\infty$ 电流稳恒下来，$\vec{J}=\rho\vec{E}$，$\vec{J}$ 有，则 $\vec{E}$ 必有

$\vec{E}$ 有，哪里来？

稳恒电流条件下，导体中有电场 $\vec{E}$，有电荷分布
与静电平衡条件不同!!!!

注意：电流稳恒的过程是和电荷的积累过程联在一起的，此过程叫瞬态过程（transient）瞬态过程由光速决定，不是电荷的实际运动速度 $\Leftarrow$ 复杂

具体例子：



一开始是均匀电场 E_0

$J_1=\frac{E_0}{\rho_1}>>J_2=\frac{E_0}{\rho_2}$ 电流太大，ρ_2 中孔径太小，有些电荷被阻在界面

电荷在 ρ_1 ρ_2 界面积累起来 $E_1=E_0-E'$

$$E_2 = E_0 + E'$$

$$J_1 = \frac{E_1}{\rho_1} = J_2 = \frac{E_2}{\rho_2} \quad \Leftarrow$$ 平衡时的电场

<u>**（5）电阻的串并联（略）**</u>

重点 ① 电流守恒

② 电压，电流关系

并联： $\tilde{R}^{-1} = \Sigma_v R_1^{-1}$

串联： $\tilde{R} = \Sigma_l R_i$

<u>**（6）电路中的能量转移**</u>

外电源的定义 $\varepsilon = \frac{dW}{dq}$

$$dW = \varepsilon dq \quad P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon i$$

外电动势的功率 $P = \varepsilon i = i^2 R = \frac{dQ}{dt}$

电动势 $\Rightarrow$ 电流 $\Rightarrow$ 环境（发热）

非理想电动势

$$\varepsilon = i(r+R) \qquad i = \frac{\varepsilon}{r+R}$$

$$P_\varepsilon = \varepsilon i = i(r+R)\cdot i = i^2 r + i^2 R = P_r + P_R$$

$\Uparrow$ $\Uparrow$

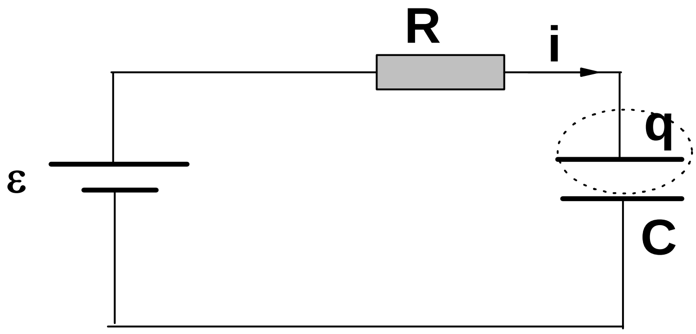
内部耗散 输出外部

$$P_\varepsilon = \int q\vec{K}\cdot d\vec{l}$$

输出功率 $P_R = P_\varepsilon - P_r$ $\Leftarrow$ 有用的功

（7） RC电路，电容的充放电

（时间变化的电流，但仍为直流电）



$$\oiint \vec{j}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}\ ,\quad -i = -\frac{\partial q}{\partial t}\ ,\quad i = \frac{\partial q}{\partial t}$$

看这样的一个电路，R C 都在

$$i = \frac{dq}{dt},\quad \varepsilon = iR + \frac{q}{c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}\cdot R$$

$$\int_0^q \frac{dq'}{C\varepsilon - q'} = \int_0^t \frac{1}{RC}dt$$

$$\ln(C\varepsilon - q')\Big|_0^q = \frac{-t}{RC},\quad \Rightarrow \quad \frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = C\varepsilon - C\varepsilon e^{-t/RC}$$

定义： $RC = \tau$

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

$i_0 = \varepsilon/R$

$$V_c = \frac{q}{c} = \varepsilon - \varepsilon e^{-t/\tau}$$

$$V_R = \varepsilon - V_c = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

物理意义

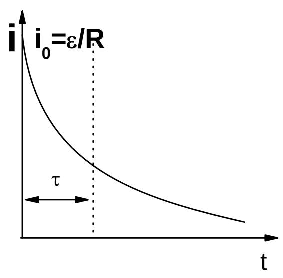
$t \to 0$ 电路表现为电阻性 有电流

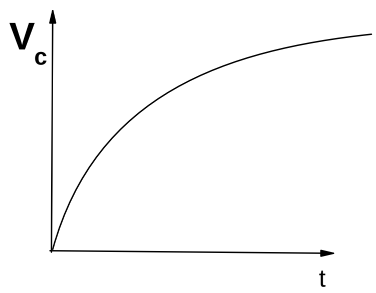
t > $\tau = Rc$ 电路逐渐被电容性所取代 电荷开始积累

$t \to \infty$ 充电完毕

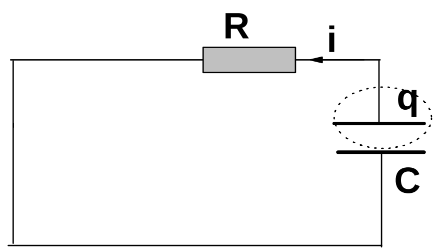
$Rc = \tau$ 定义了一个充电时间 （驰豫时间）

要想充得快，R 小，$R = \frac{V}{i}$，$C = \frac{Q}{V}$，$RC = \frac{Q}{i} = \frac{Q}{dq/dt} = t$





放电过程：



注意负号 q 的减少，i > 0

$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}$ --〉 $i = -\partial q/\partial t$

t = 0 $q = q_0$

$i = -\frac{dq}{dt}$

$$-iR + \frac{q}{c} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{c} = -\frac{dq}{dt} \cdot R$$

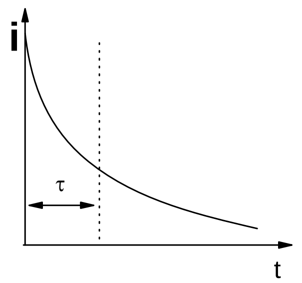
$\Uparrow$ 基尔霍夫定律二的应用

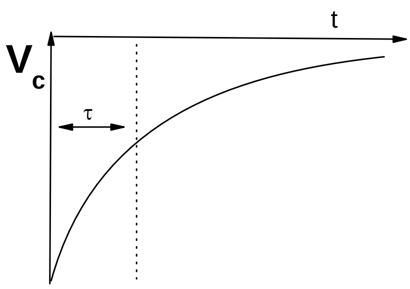
$$-\frac{dq}{q} = \frac{dt}{Rc} = \frac{dt}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \ln(q')\Big|_{q_0}^{q} = -\frac{t}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{q_0} = e^{-t/\tau}$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{q_0}{Rc} e^{-t/\tau} = \frac{V_c}{R} e^{-t/\tau} = i_0 e^{-t/\tau}$$

$$V_R = iR = i_0 \mathrm{Re}^{-t/\tau} = V_c$$





习题：P. 717, Questions: 1, 9, 15, 22
P. 722 – 724, Problems, 6, 8, 12, 16, 18