第九讲

复习：

- 环路定理导出电势能及电势的定义：

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=0 \quad \Rightarrow \quad U(f)-U(i)=-\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\Downarrow \quad U(\vec{r})=q_0V(\vec{r})$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=0 \quad \Rightarrow \quad V(f)-V(i)=-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

特别注意：电势能是“电荷”与“外场”的相互作用能，为电荷与外场共有的能量，计算多电荷体系的电势能时特别注意不要多算。

例如对 2 个电荷体系，其电势能为

$$U_{总}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}=q_1V_2(\vec{r}_1)=q_2V_1(\vec{r}_2)$$

可以看成电荷 1 与电荷 2 产生的“外电场”的相互作用能，也可以看成电荷 2 与电荷 1 产生的“外电场”的相互作用能，但不能计算 2 次，如

$$\neq q_1V_2(\vec{r}_1)+q_2V_1(\vec{r}_2)$$

物理上理解：可以考虑如何形成这样一个 2 电荷体系的。初态是 2 个电荷都放在无穷远处，它们相距也是无穷远，以这个状态作为我们的电势能 0 点。两种方法可以最后到达终态：

1）先将电荷 1 从无穷远处移到终态位置（这个过程外界不对体系做功），再将电荷 2 从无穷远处移动到终态位置（这个过程中外界克服电场力做功$q_2V_1(\vec{r}_2)$）；

2）先将电荷 2 从无穷远处移到终态位置（这个过程外界不对体系做功），再将电荷 1 从无穷远处移动到终态位置（这个过程中外界克服电场力做功$q_1V_2(\vec{r}_2)$）

总之，在形成这样一个电荷体系的过程中，只有移动其中一个电荷的过程中牵扯到外力做功，总能量要避免double-counting.

推广到N个电荷的情形，总电势能为

$$\boxed{U_{总}=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}}$$

这里的 1/2 因子就是对double-counting的修正，我们以后会多次遇到。

- 电势的计算

（1）由定义，<u>**选择合适的电势 0 点及计算路径**</u>，计算积分

$$\boxed{V(f)-V(i)=-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

（2）选择∞处为电势 0 点，已经知道处于$\vec{r}\,'$处的点电荷q在$\vec{r}$点的电势为

$V(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$，根据线性叠加原理，对任意电荷分布，可由

$\boxed{V(\vec{r})=\int\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'-\vec{r}\,|}}$ 计算（2 维，1 维分布有类似的公式）。

注意：这里我们已隐含了一个假设，即选择∞处为电势 0 点！

- 电势→电场

$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla V(\vec{r})$ ，写成分量形式为

$$E_x(\vec{r})=-\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x},E_y(\vec{r})=-\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y},E_z(\vec{r})=-\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}$$

计算电场的方法：（1）直接积分；（2）高斯定理；（3）先求电势，再求电场

- 点电荷电势--------$\dfrac{1}{r}$　　　　$E\sim\dfrac{1}{r^2}$

  偶极子电势--------$\dfrac{1}{r^2}$　　　　$E\sim\dfrac{1}{r^3}$

  四极子电势--------$\dfrac{1}{r^3}$　　　　$E\sim\dfrac{1}{r^4}$

  $\vdots$

  偶极子比点电荷更快$\to 0$，　四极子比偶极子更快$\to 0$

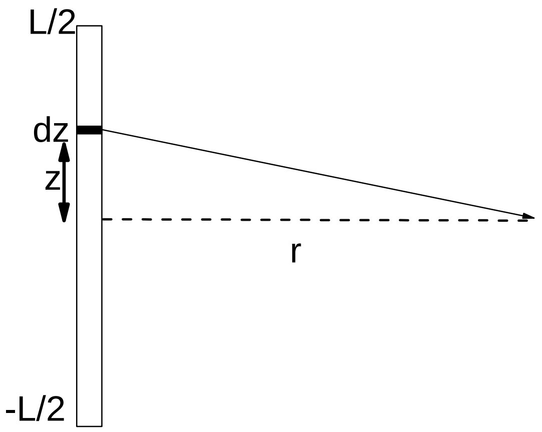
- 等势面：$V(\vec{r})$=常数定义了一个等势面；等势面与电力线互相垂直；导体表面是个等势面，整个导体是个等势体。

<u>两个例子</u>

1．均匀荷电线的势

考虑一个长度为L的均匀荷电线在中心垂线上某一点的电势，

线电荷密度为



$\lambda = Q/L$

现在是标量积分

$\vec{r}' = (0,0,z)$

$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2}$

利用电势的积分公式，得

$$V(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + r^2}}{-L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + r^2}}\right]$$

看几个极限情形：

1) $r >> L$（观察点在很远处），

$$V(r) \quad \to \quad \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{r + L/2}{r - L/2}\right]$$

$$(r - \frac{L}{2})^{-1} = \frac{1}{r}(1 - \frac{L}{2r})^{-1} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{L}{2r})$$

$$V(r) \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln[(1 + \frac{L}{2r})^2] = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \ln[1 + \frac{L}{2r}]$$

$$\approx \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{L}{2r} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

回到点电荷的电势，合理！

2) $L \to \infty$（荷电线为无限长）

$$[(\frac{L}{2})^2 + r^2]^{1/2} = \frac{L}{2}[1 + (\frac{2r}{L})^2]^{1/2} \approx \frac{L}{2}(1 + \frac{2r^2}{L^2})$$

$$\frac{L}{2} + \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2} \approx L + \frac{r^2}{L}$$

$$-\frac{L}{2}+\sqrt{(\frac{L}{2})^2+r^2}\approx\frac{r^2}{L}$$

带入电势的表达式可得

$$V(r)\quad\rightarrow\quad\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln[(\frac{L}{r})^2]=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln[\frac{L}{r}]$$

$$\downarrow$$

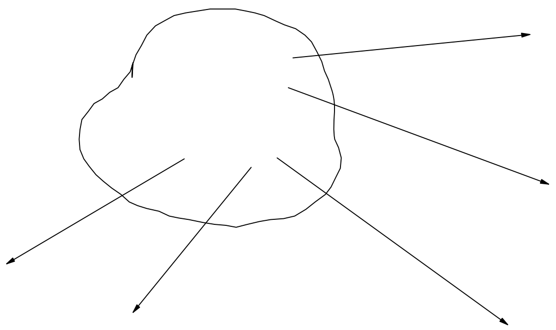
对无限长荷电线（$L\rightarrow\infty$），电势处处发散？！

这个发散显然是不合理的。 发散的原因是是我们隐含地定义了在无穷远处为电势 0 点，即$V(\infty)=0$，即

$$V(r)-V(\infty)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln[\frac{L}{r}]$$

但对此体系，因为带电体为无限长，∞处有电荷$(L\rightarrow 0)!$。 因而定义∞处为电势 0 点是不合理的 ---- 这是发散的本源！

注意：若考虑的体系是电荷被限制在一定区域内



则 $r\rightarrow\infty$ 时，$V(\vec{r})\rightarrow 0$

但现在不是，因而发散！

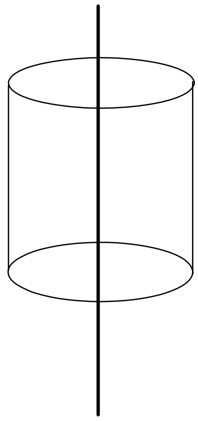
如何处理此种发散？

必须合理选择势能 0 点。若用

$$V(\vec{r})=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ 则自动选择了∞处为$V=0$

此时应利用原始定义：$V(f)-V(i)=-\int_i^f\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ 计算。

需先计算电场：



由对称性： $\vec{E} \parallel \hat{e}_\rho \qquad E(\rho)$

由高斯定理 $E(\rho)\cdot 2\pi\rho\cdot h = Q/\varepsilon_0 = \lambda\cdot h/\varepsilon_0$

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\rho\varepsilon_0}$$

定义与中心点距离为 a 的一点为电势 0 点，则，空间任意一点的电势为

$$V(r) - V(a) = \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln(\rho)\Big|_r^a$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln(a) - \ln(r)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{a}{r})$$

（其图形见后）

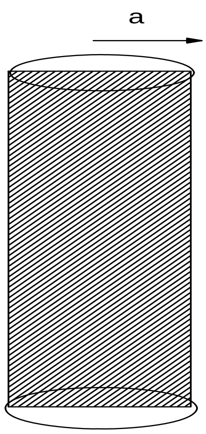
$r \to \infty$ 时 $\quad V(r) \to \infty$ 　不能将电势 0 点放在 ∞ 处！

$r \to 0$ 时 $\quad V(0) \to -\infty$ 　亦不能将电势 0 点放在原点处！

选取的电势 0 点不合适，其本身与空间任何一点的电势差均发散，这样的选择使得我们无法得到空间电势的任何信息。这种情况下，与其说空点某点处的电势发散，不如说参考点的电势发散。故必须合理选取电势 0 点，避免选择“奇点”为电势 0 点。

后面一种发散非物理，可以避免。真实的线电荷分布不存在，都是细线的极限近似。考虑真实的情况，电荷均匀分布在 $r = a$ 的圆柱内，先求电场

定义体密度分布 ρ_0，则计算可得



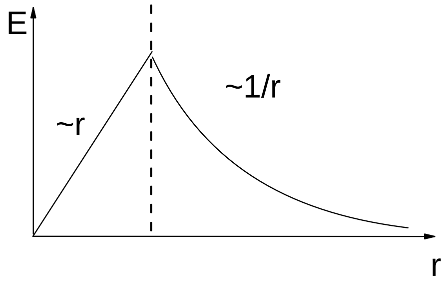
$$\lambda\cdot h = \rho_0\cdot h\cdot \pi a^2 \qquad \rho_0 = \frac{\lambda}{\pi a^2}$$

利用高斯定理计算电场

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad r \ge a$$

$$\frac{\pi r^2 h\cdot\rho_0}{\varepsilon_0} = E(r)\cdot 2\pi r\cdot h \qquad r < a$$

$$E(r)=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\cdot r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a^2}r, \qquad r<a$$



仍然定义电势 0 点为 $V(a)=0$ ，则可通过计算场的积分来计算电势差：

$r>a$ 时

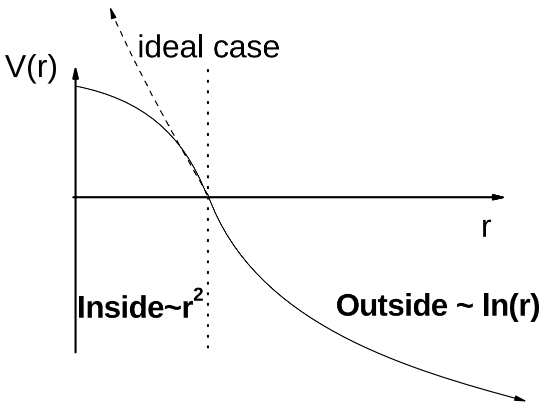
$$V(r)=-\int_a^r E(r')\cdot dr'=-\int_a^r \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'}\cdot dr'$$

$$=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r'\Big|_a^r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{a}{r})$$

$r\le a$ 时

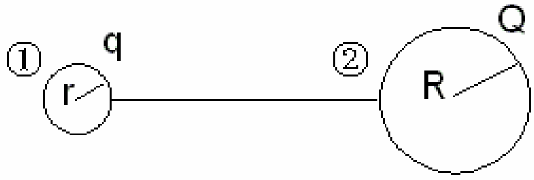
$$V(r)=\int_r^a E(r')dr'=\int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a^2}r'dr'=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}r'^2\Big|_r^a$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(a^2-r^2)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}[1-(\frac{r}{a})^2]$$



思考：考虑电荷分布在柱子表面一个薄层的情形下空间的电势分布

（2）尖端放电



考虑两个导体球（半径为 r 和 R），

当相距非常远时，电势可以分别计算为

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

当用导线相连时，电荷可以通过导线自由移动。假设 $V_1 > V_2$，则电荷必然由 $q \to Q$ 转移（电荷总是由高电势的地方流到低电势处，亦可由电场 $\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$ 得知，其方向必然是由电势高的地方指向电势低的地方，故电荷在电场下的运动必然从高电势流向低电势）

$$q\downarrow \qquad Q\uparrow$$

$$V_1\downarrow \qquad V_2\uparrow \qquad V_1 - V_2\downarrow$$

直到 $q \to q'$ $\quad Q \to Q'$ $\quad V_1 = V_2$ 为止

--- 这与导体是个等势体的结论一致！

平衡时：$\begin{cases} q' + Q' = q + Q \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q'}{R} \end{cases}$

反之（即初始分布使得 $V_1 < V_2$）亦然。

原则上，我们可以由上面的两个等式求出平衡时的电荷分布及电势值（当然，这里隐含了一个假设：两个导体球相距甚远，故它们之间的相互影响可以忽略。***思考：它们的相互作用会产生哪些可能的后果？***）

进一步可算得导体表面的电荷分布密度

$$q' = \sigma_1 \pi r^2 \qquad Q' = \sigma_2 \pi R^2,$$

则因 $\quad V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{q'}{r} = \dfrac{Q'}{R}$

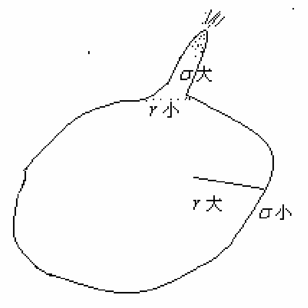
可知 $\quad \boxed{\sigma_1 r = \sigma_2 R = const.}$

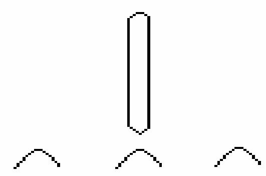
这意味着在小球上的电量小，但电荷密度大。一般的，

电荷密度与曲率半径成反比！ $\sigma \sim 1/r$

推广到任意形状的导体，在突出的地方电荷其曲率半径r小密度，因此电荷面密度大，$E_{\perp}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，电场亦越大。$\vec{F}=q\vec{E}$，在尖端处电荷受到的力最大，$F>$表面束缚电子的能力时，电荷脱离导体而去，此即尖端放电的原理。

应用：避雷针；扫描隧道显微镜 STM。





注意：

（1）导体是个等势体这是计算导体静电问题的一个重要的边界条件，但这个等势体的具体的电势值并不能预先知道，必须通过其他方法计算得到。比如可以先计算空间的电场分布(类似我们上一章计算的)，再通过计算电场的积分得到；还有一些高等的方法在《电动力学》介绍。

（2）导体的静电问题始终是一个难点，原因就是电荷可以自由移动。在考虑这类问题时要特别注意外界的条件---边界条件。比如对孤立导体，因电荷不能离开导体，导体上的电荷总数是个定值。若导体与另一个非常大的导体（如地球）相连，则所考虑的导体上的电荷就不再是个定值，另一方面，所考虑的导体一定会与大导体之间通过电荷转移来达到平衡---表现为2 者等势。所以对这一类问题，导体的势可以认为是已知量---由外接大导体的势决定，而导体上的电量不再是定值。