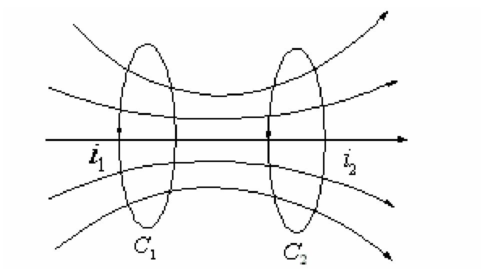
第二十五讲

复习：



- 材料的磁性：抗磁性，顺磁性，铁磁性
- 自感，互感：

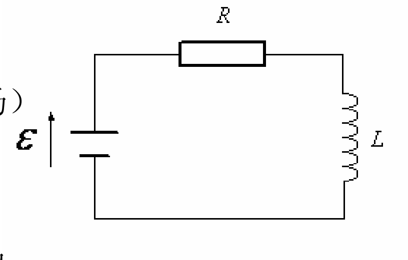
$$\varepsilon_2=\varepsilon_{22}+\varepsilon_{21}=-L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}=-L_1\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}$$

L：自感系数；M：互感系数；计算应结合法拉第定律

三、*LR*电路

前面学习过RC 电路，从建立电势差的角度来看，结论是 C 总是比 R 的响应慢半拍。现在我们要研究LR串联电路，如右图所示。解决电路问题要用到 Kirchhoff 的两个定律：



Kirchhoff 定律 1$\rightarrow$ 电流i处处相同（电荷守恒）

Kirchhoff 定律 2$\rightarrow$ 电势差环路为 0（静电场为保守场）

1．电流建立过程

将电阻、电感与电动势相连，根据 Kirchhoff 定律 2，得：

$V_\varepsilon+V_R+V_L=0$，沿着电流的方向分别计算电源、电阻、电感上的电势差，

$$\varepsilon-iR-L\frac{di}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad\varepsilon=iR+L\frac{di}{dt}$$

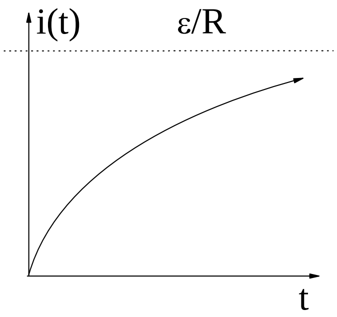
$\dfrac{\varepsilon}{L}-\dfrac{R}{L}i=\dfrac{di}{dt}$，积分可得：

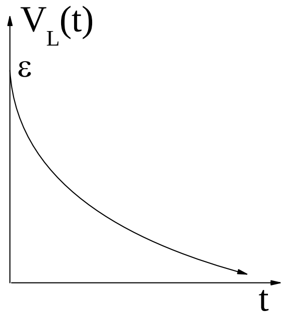
$$\int_0^i\frac{di'}{\varepsilon/L-R/L\cdot i'}=\int_0^t dt'\Rightarrow-\frac{L}{R}\ln\left(\frac{R}{L}\cdot i'-\frac{\varepsilon}{L}\right)\Bigg|_0^i=t$$

$\ln\left(\dfrac{\varepsilon/L-R/L\cdot i}{\varepsilon/L}\right)=-\dfrac{Rt}{L}$，得 $\dfrac{\varepsilon}{L}-\dfrac{R}{L}i(t)=\dfrac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$ ，即

$i(t)=\dfrac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau_L}\right)$ 其中：$\dfrac{L}{R}=\tau_L$为驰豫时间（L大则电流不易变化，因而τ长。作为对比：$\tau_c=RC$）。落在电阻及电感上的电势差分别为：

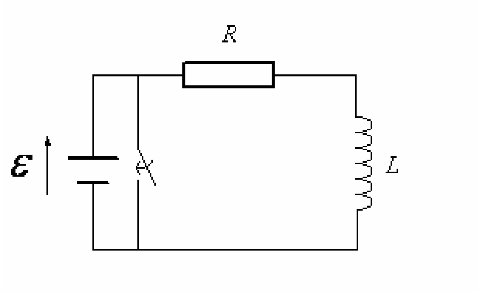
$$\left|V_R\right|=i(t)R,\qquad\left|V_L\right|=\left|-L\frac{di}{dt}\right|=\varepsilon e^{-t/\tau_L}$$





物理图像象：当电源接通时，电流的变化立刻被电感器感知到，因此电感上产生了最大的电势差（全部电动势）。电流逐渐建立后，稳恒的过程中电压逐渐转移到电阻上，最后直流极限电感上没有电压。

2．电流消失过程（将电池短路）



$$V_R + V_L = 0$$

$$iR + L\frac{di}{dt} = 0$$

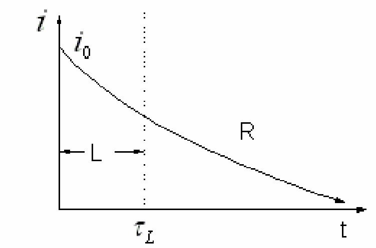
$$iR = -L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\cdot dt$$

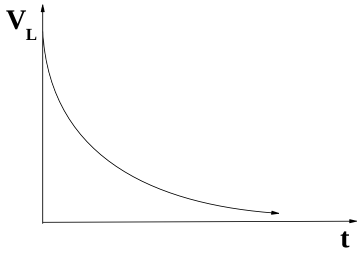
积分可得

$$\ln\left(\frac{i(t)}{i_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L} \qquad \left(\tau_L = \frac{L}{R}\right),$$ 则电流及电感上的电势差分别为

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L} = \frac{\varepsilon}{R}\cdot e^{-t/\tau_L}$$

$$V_L = -L\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot\frac{R}{L}\cdot e^{-t/\tau_L} = \varepsilon e^{-t/\tau_L}$$

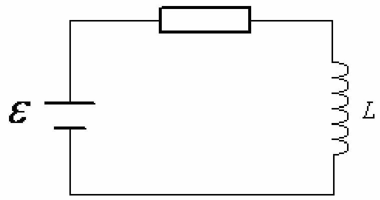




结论：综合两例发现 L 对 i 变化的响应总是快过 R(R 对电流变化的响应是即时的)。当电流变化来时 L 先，R 中，C 后。

四、磁场能

与电容相似，电感可以贮存磁能。 检查一个 LR 串联电路看电感内部的$\vec{B}$场是如何建立的。电动势的输出功率



$P = \varepsilon i$ （单位时间电源对外界做功）

单位时间以热能形式耗散在 R 上

$$\frac{dQ}{dt} = i^2 R$$

剩余的用以建立磁场能

$$\left(\varepsilon i - i^2 R\right) = \frac{dU_B}{dt} \quad \Rightarrow \quad Li\frac{di}{dt} = \frac{dU_B}{dt}$$

电路中，电流最后稳定时的静磁能

$$\boxed{U_B(i) = \frac{1}{2}Li^2}$$

思考：**$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Leftarrow$ **磁场对运动电荷（电流）产生作用力。但是，当**$\vec{B}$ **稳恒时，**$\vec{F} \perp \vec{v}\left(\vec{j}\right)$ **磁场不对电流做功**$\vec{F} \cdot \vec{j} = 0$**，那么磁场能如何与电流交换能量建立起来的？

五：磁能密度

长螺线管的自感系数为：$L = \mu_0 \mu_r n^2 \cdot \Omega$

则体系的总磁能为： $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n^2 i^2 \cdot \Omega$，则

可定义磁能密度： $u_B = \frac{U_B}{\Omega} = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n^2 i^2$

注意到： $B = \mu_0 \mu_r n i$，则，$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$

事实上此式严格成立，而且成立的范围更广，对非均匀磁场及随时间变化的磁场，均有： $u_B(\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2}{\mu_0 \mu_r}$

将两种磁场能的表达式做一对比

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad\qquad u_B(\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2}{\mu_0\mu_r}$$

磁能被i带有　　　　　　　　磁能以场能的形式存在

不妨与电场能（电容能）做一个对比，可以发现同样的结论。

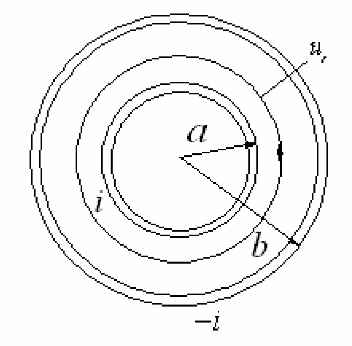
<u>例</u>：同轴电缆　　内导体：半径a的导体柱壳

外导体：半径b的导体柱壳

内导体：电流i均匀分布在壳上

外导体：电流i均匀分布在壳上

电流从内导体流出，从外导体流回来，形成回路。



求：a）单位长度内的磁场能

b）单位长度的自感

解：a）求$\vec{B}$：

$$H(r) = \frac{i}{2\pi r} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0\mu_r i}{2\pi r} \quad \left(r \in [a,b]\right)$$；其他区域为 0。

磁场能密度为：$\mu_B(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2 = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r\frac{i^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{\mu_0\mu_r i^2}{8\pi^2 r^2}$

总磁场能（总长度为 h）：

$$U_B = h\cdot\int \mu_B(\vec{r})\cdot 2\pi r dr = h\cdot\int_a^b \frac{\mu_0\mu_r i^2}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}i^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot h$$

b）　$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)i^2\cdot h$

$$L = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot h$$　　单位长度的电感为$L = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

思考题:

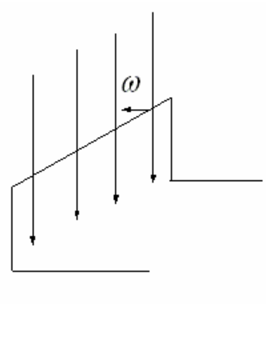
（1）利用电感的定义来计算此体系的电感系数，是否得到同样的结果？

（2）$b\to\infty$ 时此结果应回到一个半径为 a 的单导线的情况。但结果发散，你觉得奇怪么？

（3）目前的定义及计算只对细导线成立。若导线有一定的截面积，因此导线内部的磁通量不能忽略，应如何计算电感？

（4）目前的定义及计算假设电流沿导线均匀，所以可以用一个参量 i 来代表。若导线上因为某种原因必须考虑电流非均匀，此时如何定义及计算 L?

第 37 章：交流电路



(1) 定义

直流　　→　电流方向不随时间变化

交流　　→　电流方向随时间变化

（如右图所以，在磁场中的旋转线圈即产生一个交流电动势，接上外加负载，即有交流电流）。

交流电的随时间变化的方式很多，最简单为简谐交流电：

$\varepsilon=\varepsilon_0\sin(\omega t)$　　←　可以由线圈以恒定的角频率切割磁力线得到。

根据 Fourier 变换，任意的随时间变化的函数可展开

$$F(t)=\sum_{\omega}\varepsilon_{\omega}\sin(\omega t)$$

因此，只要单频的情况明白了，所有的都明白了。

单频的外电动势：$\varepsilon=\varepsilon_m\sin\omega t$ 即是一个受迫振动源（类似力学中的受迫振子）。瞬态过去后，回路中产生的电流一定为：$i(t)=i_m\sin(\omega t-\phi)$　⇐　受迫振动的基本概念，即振动的方式一定于振动源 ω 一定相同。但振幅与相位 i_m,ϕ 未知，是我们本章的核心内容。在解决这个问题之前，我们首先分别研究各个基本元件的电压与电流之间的关系。

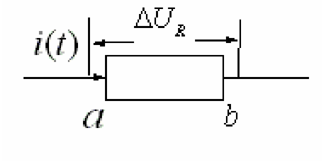
（2）基本元件的电压差与电流之间的关系

为统一起见，取电势差为 $\Delta V=V_a-V_b$（与我们前期的定义略有不同）。

a）电阻 R

直流时　$Ri=\Delta V=V_a-V_b$

交流时（ω 不太大时欧姆定律成立）仍成立：



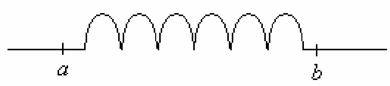
$$Ri(t)=\Delta V(t)$$

$$\Delta V_R(t)=i_mR\sin(\omega t-\phi)$$

结论：　ΔV_R　与　$i(t)$　同位相，与 ω 无关

b）电感 L

基本方程：$\varepsilon=-L\dfrac{di}{dt}=V_b-V_a$　←　理想无内阻



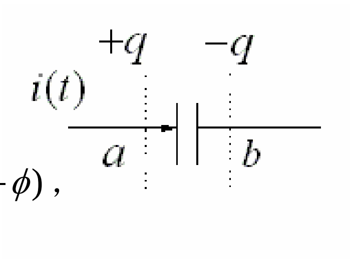
$$\Delta V(t)=V_a-V_B=L\frac{di}{dt}=L\omega\cos(\omega t-\phi)=L\omega\sin(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})$$

$$\Delta V_L(t)=X_L\sin(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})$$

$X_L = L\omega$ 即定义为感抗（与电阻同量纲）。其与频率成正比，因此，高频电流不易通过 L。另外，ΔV_L 比 $i(t)$（或是 $V_R(t)$）快 $\frac{\pi}{2}$ 相位。

c） 电容 C

$$V_a - V_b = \frac{q(t)}{C}$$



看起来似乎没电流，但交流电可以“有效”通过 C

因 $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$，对简谐变化的电流，$i(t) = i_m \sin(\omega t - \phi)$，

可知，$q(t) = -\frac{i_m}{\omega}\cos(\omega t - \phi)$ （成立条件：最初的瞬态过去之后，稳定后的结果）

故：$\Delta V_C = \frac{q(t)}{C} = -\frac{1}{\omega C} i_m \cos(\omega t - \phi) = \frac{1}{\omega C} i_m \sin(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})$

可定义 $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 为容抗，与电阻、感抗同量纲且物理作用一致。容抗与频率成反比，$\omega \to 0$ 时 $x_C \to \infty$，因此低频不能通过（直流电的确不能通过电容）。另外：C 上电压的相位比电流（或是电阻上的电压相位）晚 $\frac{\pi}{2}$。

总结：与前期的结论一致，L 的变化快过 R 快过 C。

将 $V-i$ 关系写成统一的形式：

$$\Delta V_{R,L,C}(t) = X_{R,L,C} i_m \sin(\omega t - \phi + \Delta\phi_{R,L,C})$$

$X_R = R$	$X_L = L\omega$	$X_C = \frac{1}{C\omega}$
$\Delta\phi_R = 0$	$\Delta\phi_L = \frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_C = -\frac{\pi}{2}$
与频率无关，即时	阻高频，通低频，快半拍	阻低频，通高频，慢半拍

习题：P842， Problems，5， 9， 10
P840， Excercies，30，32