第七讲

复习：

① 导体体系的几个例子，σ 是未知量

σ 可以通过高斯定理（库仑定律）+导体静电平衡条件唯一决定；

注意导体与绝缘体荷电体系的根本不同。

② 电势能的引入

（1） 静电场 $\vec{E}$ 对电荷 q 的做功不依赖于路径 $\vec{E}\,//\,\hat{e}_r$ ， $E(r)$

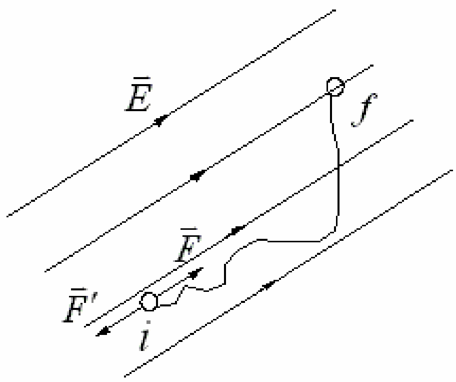
（2） $\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=0$ 静电场为无旋、保守力场

（3） $\Delta W=\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=K$

外场做功的代价是？ (相互作用)势能的减少。

$\Delta W=U(i)-U(f)$

$$\boxed{U(f)-U(i)=-\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}}$$



<u>**看法 2：**</u>

可以通过另一种方法得到电势能的定义。

$\vec{E}$ 在 q 的力为 $\vec{F}=q\vec{E}(\vec{r})$

假设有一外非静电力 $\vec{F}'=-\vec{F}$ 平衡此静电力，使得带电体速度为 0

从 $i\to f$ ，此过程机械能没有增加，叫做准静态

将 $\vec{E}$，q 看成一体

$\vec{F}'$ 的做功 $\Delta W'=\int_i^f \vec{F}'\cdot d\vec{\ell}$

$\vec{E}$，q 总体系的总能的增加 $=\Delta W'$

从 $i\to f$ 总动能的变化 $\Delta K=0$ （准静态）

E 场总场的变化 $\Delta U_E=0$ （$\vec{E}$ 场没变化）

q 产生的场的总能 $\Delta U_q=0$ (q 在任意位置的场一样)

q 与 $\vec{E}$ 的相互作用　　有变化　　（q 与 $\vec{E}$ 的相对位置）

势能　　$\Delta U = U(f) - U(i) = \Delta W'$

$$U(f) - U(i) = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int_i^f q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

注意：能量守恒与转化：总能量守恒，能量只能相互转化，
不可能凭空产生，消灭。

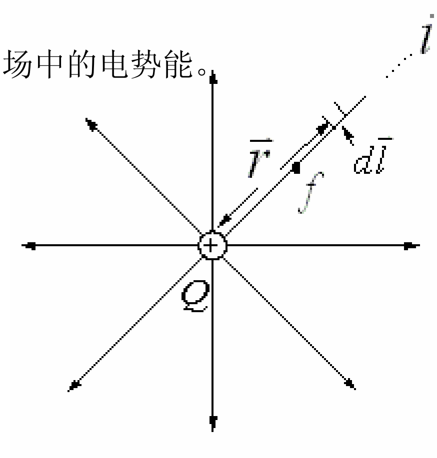
I)　$i \to f$ 的过程中，势能转化为动能

II) 外力对电荷做功$\Rightarrow$势能（不是动能）

（5）举例

例 1：一个电荷 q 在电荷 Q（原点）的电场中的电势能。

（f：有限远点；i：无限远点）



解：$U(f) - U(i) = -\int_i^f q\vec{E}_q(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$

i 为 ∞ 远，　　$U_q(i) = 0$

$i \to f$　　电场力 $\vec{F} \,//\, \hat{e}_r$

$$U_q(f) - 0 = \int_{\vec{R}}^{\infty} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{R}}^{\infty} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_R^{\infty} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以　　$U_q(f) = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$　　（$\vec{R}$ 为有限远点 f 的位置矢量）

注意：

（1）Q 在 q 场中的电势能？将坐标原点平移到 q 所在的 $\vec{R}$ 处，可得

$$U_Q = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（2）　是否 q，Q 的总势能为 $U = U_q + U_Q = 2\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$　？　NO！

相互作用能（我们所考虑的势能）只计算作用一次

将 $q \to \infty$ （或将 $Q \to \infty$ ）　　总电势能＝0

Q，q 都在 ∞ 处（之间亦 ∞ ）　　总电势能＝0

将 q 搬到 $\vec{R}$ 处，不要 U_q　　$U = 0$

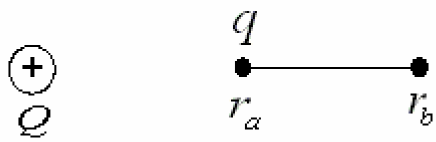
$\vec{q}$ 在 $\vec{R}$ 处时，将 $Q \to 0$ 点　　$U_Q = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

因此，q，Q 的总势能为 $U_Q = U_q = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$，是属于两电荷共同所有。

<u>**例 2**</u>：在原点处固定一个电荷 Q，另一电荷 q 在 Q 的作用下

由 $\vec{r}_a$ 移动到 $\vec{r}_b'$，其初速度为零，求电荷 q 的末速度？

解：　$\vec{F} = m\ddot{x} = m\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{x^2}$



$\dot{x}\big|_{t=0} = 0$，电荷 q 在运动过程中受到的电场力为变力，将上式两边同乘速度 v

$$mv\frac{dv}{dt} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$mvdv = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}dx \quad \Rightarrow \quad mv^2 = \int_{r_a}^{r_b}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}dx = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b})$$

也可根据能量守恒：

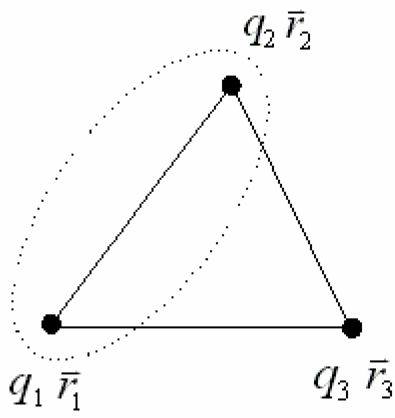
初态总能量　$\dfrac{1}{2}mv_a^2 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r_a}$　（$v_a = 0$）

终态　$\dfrac{1}{2}mv_b^2 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r_b}$

所以　$\dfrac{1}{2}mv_b^2 = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b})$

<u>**例 3**</u>：三个电荷体系 $q_1\vec{r}_1$，$q_2\vec{r}_2$，$q_3\vec{r}_3$ 的势能总和

解：相距 ∞ 时总势能为 0，如何达到现在这个状态



先将 q_1 q_2 放到位，此时体系的势能总和为

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

再将 q_3 放到 $\vec{r}_3$ 处，q_3 在 q_1，q_2 的电场($\vec{E}$)
中的势能为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$U' = -\int_{\infty}^{\vec{r}_3} q_3 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\vec{r}_3}^{\infty} q_3 \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{\vec{r}_3}^{\infty} q_3 \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}$$

$\int_{\vec{r}_3}^{\infty} q_3 \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell}$ ——q_2 不在时，将 q_3 从 ∞ 处搬到 $\vec{r}_1$ 的功

$\int_{\vec{r}_3}^{\infty} q_3 \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}$ ——q_1 不在时，将 q_3 从 ∞ 处搬到 $\vec{r}_3$ 的功

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

$$U_{总} = U + U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}})$$

此方法可推广到计算 N 个电荷体系的总势能

$$U_{总} = [\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}]\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

注意：只能数一次。

电势

（1）定义

$$\begin{array}{ccc} \text{静电力}\ \vec{F} & \rightarrow & \vec{E}\ \text{电场} \\ \downarrow & & \downarrow\uparrow \\ \text{电势能}\ U & \rightarrow & \varphi\ \text{电势} \end{array}$$

$$U(f)-U(i)=-\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=-\int_i^f q\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=q\left[-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right]$$

一个电荷q在外电场$\vec{E}$中的势能$\propto q$， 因此，

$-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$是一个不依赖于此电荷而刻画$\vec{E}$的性质的量。

定义：

$$\boxed{\varphi(f)-\varphi(i)=-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$ ——电势

$$\varphi={U}/{q} \qquad \vec{E}={\vec{F}}/{q}$$

$U,\vec{F}$都依赖于检验电荷的存在及其电量；而$\varphi,\vec{E}$是不依赖于检验电荷，而只是刻画源电荷的性质。

电势差$\varphi(f)-\varphi(i)$刻画了电场对q做功的能力，单位是伏特V。电场到底做了多少功ΔW，取决于电量的大小。

（2）点电荷的电势

通常取$\varphi(\infty)=0$，则

$$\varphi(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^2}\cdot dr'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\bigg|_{\infty}^{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

亦可以从电势能出发

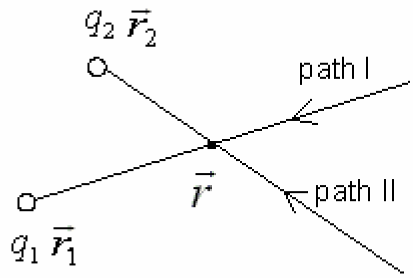
$$\varphi(\vec{r})={U(\vec{r})}/{q}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big/q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

（3）两个电荷体系$q_1(\vec{r}_1)$，$q_2(\vec{r}_2)$的电势。

① 由$\varphi(f)-\varphi(i)=\int_f^i \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$出发，定义$\varphi(\infty)=0$

$$\varphi(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

根据电场叠加原理 $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_1(\vec{r})+\vec{E}_2(\vec{r})$



$$\varphi(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}_1(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}$$

$$+\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}_2(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}=\varphi_1(\vec{r})+\varphi_2(\vec{r})$$

我们仍未选择路径，利用积分与路径无关的性质

$$\varphi_1(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}_1(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\quad\text{------}\quad \text{Path I}$$

$$\varphi_2(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}_2(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\quad\text{------}\quad \text{Path II}$$

如果选择同样的路径，积分很繁，但结果完全一样

$$\varphi(\vec{r})=\varphi_1(\vec{r})+\varphi_2(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}]$$

利用另一个定义 $\varphi(\vec{r})=U(\vec{r})/q$，在 $\vec{r}$ 处放一检验电荷 q

$$U(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}+\frac{q_1q_0}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{q_2q_0}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}]$$

$$\varphi(\vec{r})=U(\vec{r})/q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+\frac{q_1q_2}{q_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}]$$

之所以多出最后一项，原因是电势能零点选择不同。

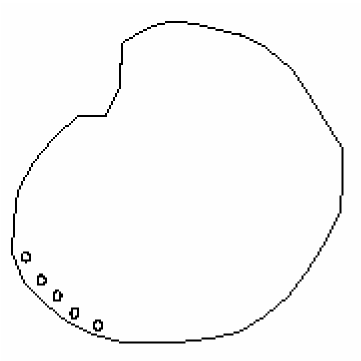
计算 $U(\vec{r})$ 时，电势能零点选择为与 q_1 q_2 q_0 分别相距无穷远，（注意）但这是我们要的吗？我们的 φ 是计算 q_1 q_2 相对位置不变，作为外场的来源时的做功的能力。

(4) 推到 N 个电荷体的电势

$$\varphi(\vec{r})=\int_{\vec{r}}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{\ell}=\varphi_1+\varphi_2+\ldots\varphi_N=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

同理 $N+1$（q，检验电荷）的总能

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}+\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}]$$



带电体

$$\varphi(\vec{r})\neq u/q$$

推广至任意电荷连续分布的带电体

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(F)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}_i-\vec{r}|}$$

$$=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r}'-\vec{r}|}$$