线偏振的光经全反射后偏振的变化

1 全反射的 Fresnel's Law（忽略介质磁性）

根据 Snell' Law: $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{n_2}{n_1}$ ⋯⋯（1）

当 $n_1>n_2$ 时，$\theta_1<\theta_2$ 。

如果入射角 $\theta_1\geq\theta_c=\arcsin\sqrt{\dfrac{n_2}{n_1}}$ ⋯⋯ （2）

便发生全反射。

反射波的 Fresnel's Law 可以写为（全部用角度表示）：

$$E_{\perp}^{'}=-\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}E_{\perp}\ \cdots\cdots（3）$$

$$E_{\parallel}^{'}=\frac{\sin\theta_1\cos\theta_1-\sin\theta_2\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_1+\sin\theta_2\cos\theta_2}E_{\parallel}\ \cdots\cdots（4）$$

令 $n=\dfrac{n_2}{n_1}$ ⋯⋯（5）

即相对折射率，代入（1）得：

$$\sin\theta_2=\frac{1}{n}\sin\theta_1\cdots\cdots（6）$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_1}\cdots\cdots（7）$$

因此，全反射的条件变为：$\sin\theta_1\geq n$ ⋯⋯（8）

所以 $\cos\theta_2=i\sqrt{\dfrac{1}{n^2}\sin^2\theta_1-1}$ ⋯⋯（9）

将（6）（9）代入（3）（4），消去 θ_2，得：

$$E_{\perp}^{'}=\frac{\cos\theta_1-i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\cos\theta_1+i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}E_{\perp}\cdots\cdots（10）$$

$$E_{\parallel}^{'}=\frac{n^2\cos\theta_1-i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{n^2\cos\theta_1+i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}E_{\parallel}\cdots\cdots（11）$$

（10）和（11）就是全反射 Fresnel's Law，和课件中的完全一样，只是没有考虑介质的磁性。

2 反射波是线偏振的条件

同样，和课件中的结论一致：

$|E_\perp^{'}|=|E_\perp|$……（12）

$|E_\parallel^{'}|=|E_\parallel|$……（13）

显然，在全反射时，电场强度的两个分量的振幅不变。

另一方面，看相位的变化：

我们可以令

$E_\perp^{'}=E_\perp e^{i\varphi_\perp}$……（14）

$E_\parallel^{'}=E_\parallel e^{i\varphi_\parallel}$……（15）

代入（10）（11）：

$$\varphi_\perp=\arctan\frac{2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-\cos^2\theta_1}$$……（16）

$$\varphi_\parallel=\arctan\frac{2n^2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-n^4\cos^2\theta_1}$$……（17）

可见，全反射时的电场强度的相位变化在垂直和水平方向是不相等的。

我们已经知道，入射波是线偏振波时，电场的两个分量的相位是相同的。经过全反射后，反射波的两分量的相位不再相同，它们的相位差是

$\Delta\varphi=\varphi_\perp-\varphi_\parallel$……（18）

代入（16）（17）：

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=\arctan\left(\frac{2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-\cos^2\theta_1}\right)-\arctan\frac{2n^2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-n^4\cos^2\theta_1}\\&=\arctan\left[\frac{\dfrac{2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-\cos^2\theta_1}-\dfrac{2n^2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-n^4\cos^2\theta_1}}{1+\left(\dfrac{2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-\cos^2\theta_1}\right)\left(\dfrac{2n^2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1-n^2-n^4\cos^2\theta_1}\right)}\right]\\&=\arctan\left[\frac{2\sin^2\theta_1\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^4\theta_1-\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-n^2)}\right]\end{aligned}$$……（19）

$\Delta\varphi$为π的整数倍时，$E_\perp^{'}$与$E_\parallel^{'}$合成线偏振，即

$\sin^2\theta_1\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}=0$ ……（20）

由（8）知

$\sin\theta_1=n$ ……（21）

或

$\cos\theta_1=0$ 即 $\theta_1=\pi/2$ ……（22）

Conclusion：当 $\sin\theta_1=n$（刚发生全反射）或 $\theta_1=\pi/2$（掠入射）时，反射波是线偏振的。

3 反射波是圆偏振的条件

即要求入射波电场强度 E 的两个分量振幅相等，即 $|E_\perp|=|E_\parallel|$ 。由（12）（13）知反射波 E' 的两个分量振幅也相等，$|E'_\perp|=|E'_\parallel|$

且相位差要求 $\Delta\varphi=(2m+1)\pi/2$， m=0,1,2,… ……（23）

将（23）代入（19）：

$\sin^4\theta_1-\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-n^2)=0$ ……（24）

$2\sin^2\theta_1\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}=0$ ……（25）

得：$\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{n^2+1\pm\sqrt{n^4-6n^2+1}}$ ……（26）

Conclusion：入射波电场强度 E 的两个分量振幅相等，即 $|E_\perp|=|E_\parallel|$，且入射角 θ_1 和相对折射率 n 满足（26），反射波是圆偏振波。

4 对圆偏振的条件的进一步讨论

由（26）知：$\sin^2\theta_1=\dfrac{1}{4}(n^2+1\pm\sqrt{n^4-6n^2+1})$ 是实数，易知

$n^4-6n^2+1\geq 0$ ……（27）

得：$\begin{matrix} n\geq\sqrt{3+\sqrt{8}} \\ n\leq\sqrt{3-\sqrt{8}} \end{matrix}$ ……（28）

由（8）知 n<1,

$\therefore n\leq\sqrt{3-\sqrt{8}}\approx 0.414$

即 $\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{1}{0.414}=2.41$ ……（29）

查看一般透明物质对空气的相对折射率，

金刚石	2.42
二硫化碳	1.63
玻璃	1.5-1.9
水晶	1.55
岩盐	1.55
酒精	1.36
水	1.33

Conclusion：线偏振光从一般透明介质到真空（空气）的全反射不会产生圆偏振（光波段）。而在无线电波段，介质的 n 会有较大的值，此时线偏振的入射波全反射后会产生圆偏振。