

NOTE: 转移矩阵方法探究电磁波多层介质表面透射

辛建宏 牛晓海

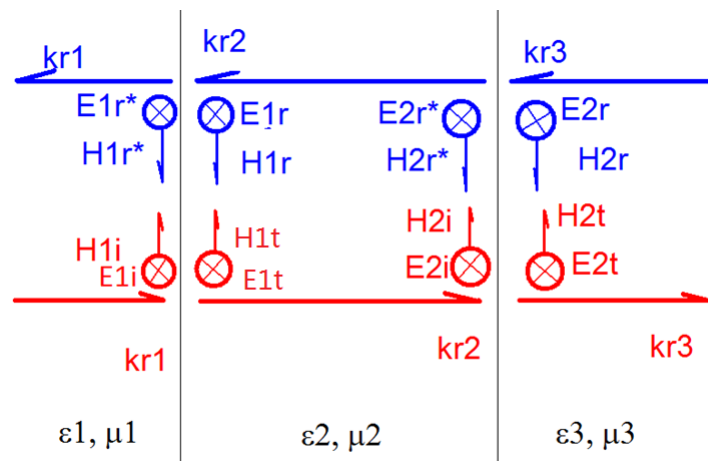
综述:

(前三步, 主要; 第四步个人想法, 不成熟。周老师如果太忙**请只看黄色字体**)

- 1、**理论:** 电磁波在两介质层间透射转移矩阵;
- 2、**求本征值:** 如果这种晶体呈现周期性边界条件 $A = Ae^{-ikd}$, 通过转移矩阵本征方程可以找到这样一种散射频率 ω , 使得电磁波在介质中周期性传播, 而不会衰减; 这一原理也可以制作波导;
- 3、**模拟验证:** 经文献检索, 原来通过制造材料周期性边界条件制作波导这一创意早有人实现, 这就是一维光子晶体波导。我们使用文献数据, 使用 Comsol 软件模拟了 ZnS/MgF₂ 一维光子晶体波导;
- 4、**个人想法:** 经进一步文献检索¹, 我们学习了二维光子晶体波导光输运特性, 获得如下启示:
 - a. 同理可以转移矩阵方法获得电磁波传播特征频率;
 - b. 受布拉格散射启发, 光线不但可以在波导中直线传播, 而且可以转弯 (散射);
 - c. 光线在二维光子晶体波导中呈现“慢光效应”, (群速度 $V_g \leq 0.01c$);
 - d. 前文 b、c 项相结合: 控制光速。我们是否可以制造这样一种介质, 一方面, 通过在介质中人为制造缺陷, 制造超长的光通道以扩大光程; 另一方面, 因慢光效应, 光波群速度降低; 最后, 让光波从需要的地方射出介质: 如是光在介质中停留时间极大延长了。再经文献检索, 这一想法尚未有人实现。

详细:

1、透射转移矩阵 (受到周老师上课启发)



同量子力学中除了处理波函数方法透射方法类似, 我们在仅仅研究向右、左传播的两列波;

¹ 孙鉴等, 《二维光子晶体波导的能带分析》; 《光电子技术》第 30 卷第 3 期, 2010 年 9 月。

对界面 1

$$\begin{aligned} n \cdot (E_{12+} - E_{12-}) &= 0 \\ n \times (H_{12+} - H_{12-}) &= 0 \end{aligned}$$

因此对于两界面表面

$$\begin{aligned} E_{12} &= E_{1t} + E_{1r} \\ H_{12} &= H_{1t} - H_{1r} \\ E_{23} &= E_{2i} + E_{2r*} \\ H_{23} &= H_{2t} - H_{2r*} \end{aligned}$$

麦克斯韦关系

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{Zk}$$

所以

$$H_{1t} = E_{1t}/Z_2; \quad H_{1r} = E_{1r}/Z_2$$

考虑两界面间相位滞后因子为 $e^{i\delta_2}$, 有

$$\begin{aligned} E_{2i} &= E_{1t} \cdot e^{i\delta_2} \\ E_{1r} &= E_{2r*} \cdot e^{i\delta_2} \end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \\ \delta_2 &= \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \cdot d_2 \cdot \omega \end{aligned}$$

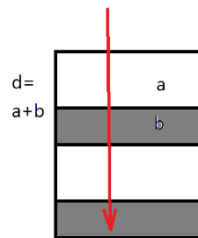
由上述方程联立, 得:

$$\begin{pmatrix} E_{23} \\ H_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\delta_2} \\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{e^{i\delta_2}}{Z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2r*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\delta_2} & 1 \\ \frac{e^{i\delta_2}}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\delta_2} \\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{e^{i\delta_2}}{Z_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_{12} \\ H_{12} \end{pmatrix}$$

解得介质 2 中转移矩阵:

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos \delta_2 & iZ_2 \sin \delta_2 \\ i \sin \delta_2 / Z_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}$$

2、介质中存在周期性结构



简单起见, 我们考虑以两层为一周期 (当然更多层数允许)。若电磁波在介质中传播而不衰减, 则应该满足周期性边界条件:

$$\begin{pmatrix} E_{34} \\ H_{34} \end{pmatrix} = T_2 T_3 \begin{pmatrix} E_{12} \\ H_{12} \end{pmatrix} = e^{ikd} \begin{pmatrix} E_{12} \\ H_{12} \end{pmatrix}$$

其中 $d_1 = a$; $d_2 = b$; $d = d_1 + d_2 = a + b$

解上述本征方程, 解得特征发射频率 $\omega = ck$ 。意即以此频率发出的波能够在这种周期性结构中无衰减的传播。

$$T = T_2 T_3 = \begin{pmatrix} \cos \delta_2 & iZ_2 \sin \delta_2 \\ \frac{i \sin \delta_2}{Z_2} & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_3 & iZ_2 \sin \delta_3 \\ \frac{i \sin \delta_3}{Z_3} & \cos \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \delta_2 \cos \delta_3 - \frac{Z_2}{Z_3} \sin \delta_2 \sin \delta_3 & iZ_3 \sin \delta_3 \cos \delta_2 + iZ_2 \sin \delta_2 \cos \delta_3 \\ i \cdot \frac{\sin \delta_3 \cos \delta_2}{Z_3} + i \cdot \frac{\sin \delta_2 \cos \delta_3}{Z_3} & \cos \delta_2 \cos \delta_3 - \frac{Z_2}{Z_3} \sin \delta_2 \sin \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{12} \\ H_{12} \end{pmatrix} = e^{ikd} \begin{pmatrix} E_{12} \\ H_{12} \end{pmatrix}$$

$$\det(T - e^{ikd}) = 0$$

这是一个超越方程，可以 mathematica 数值求解。

3、一维光子晶体波导使用 Comsol 软件模拟结果

通过文献查阅，我们了解到以上是一维光子晶体的原理。我们搜集数据模拟了 ZnS/MgF₂ 光子晶体。

各项数据参数如下：

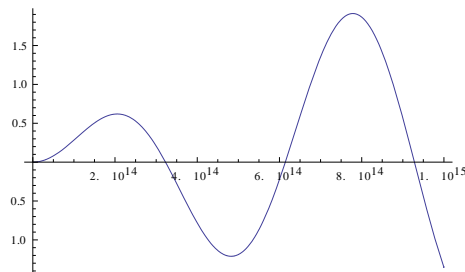
$$(a = \text{ZnS}, b = \text{MgF}_2)$$

$$a = 740\text{nm}, b = 1260\text{nm}$$

$$\epsilon_a = 5.5225, \epsilon_b = 1.9044$$

Mathematica 数值求解本征方程

$$\det(T - e^{ikd}) = 0$$



得到本征传播基频

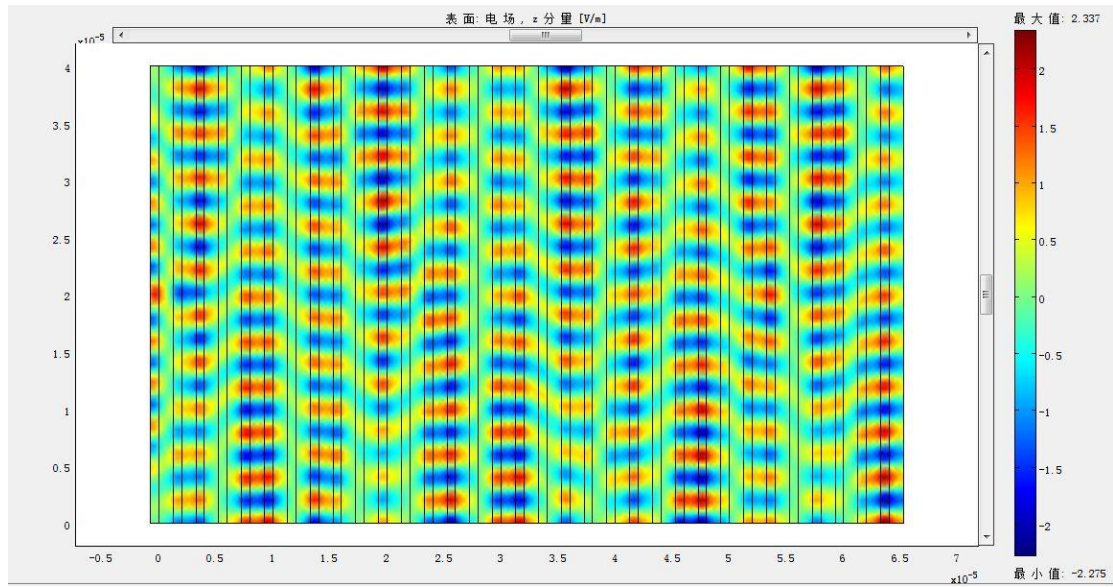
$$\omega_0 = 3.1\text{THz}$$

而文献给出的值略有出入

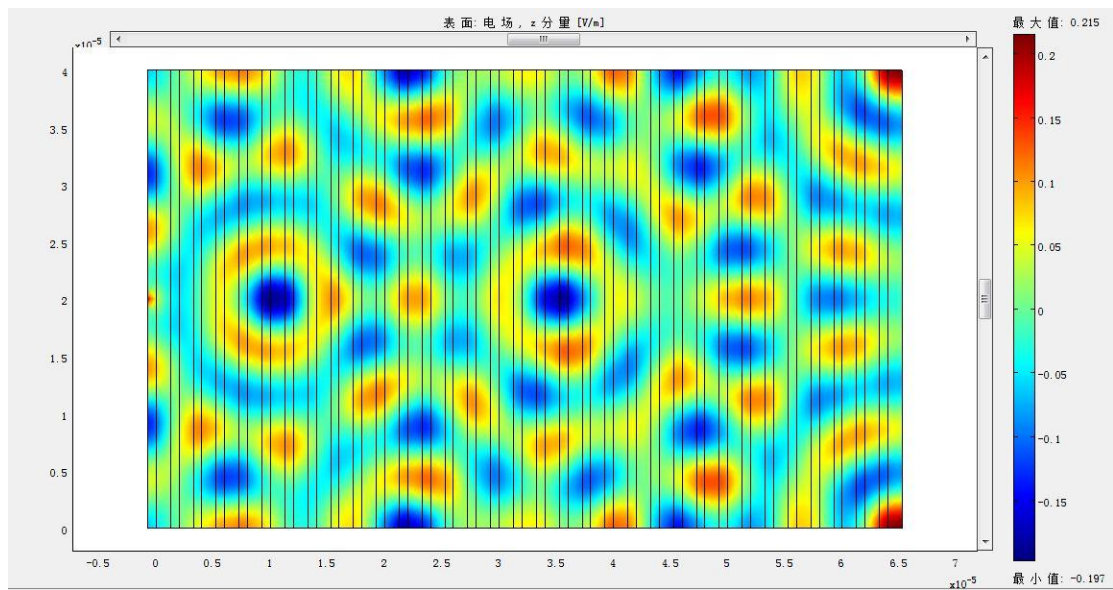
$$\omega_0' = 2.7\text{THz}$$

Comsol 模拟结果：

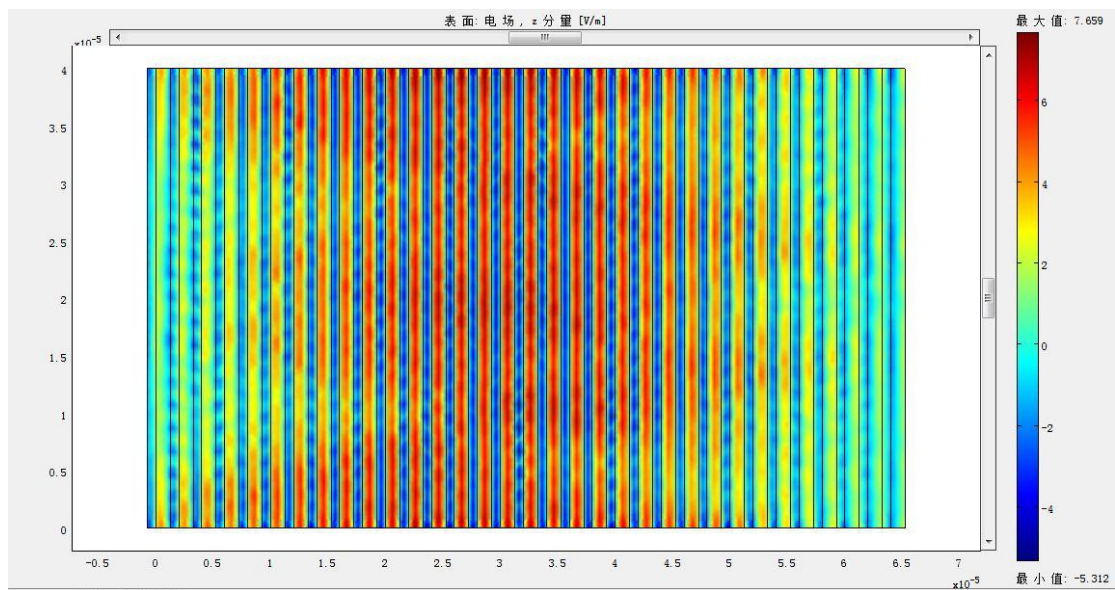
$$\text{周期}\tau=33, \text{射频}\omega_0 = 3.1\text{THz}$$



将射频调整至 $\frac{1}{2}\omega_0$, 电磁波传播明显不再满足周期性边界条件。其中电场值非常小, 说明此时介质不能作为良好波导。

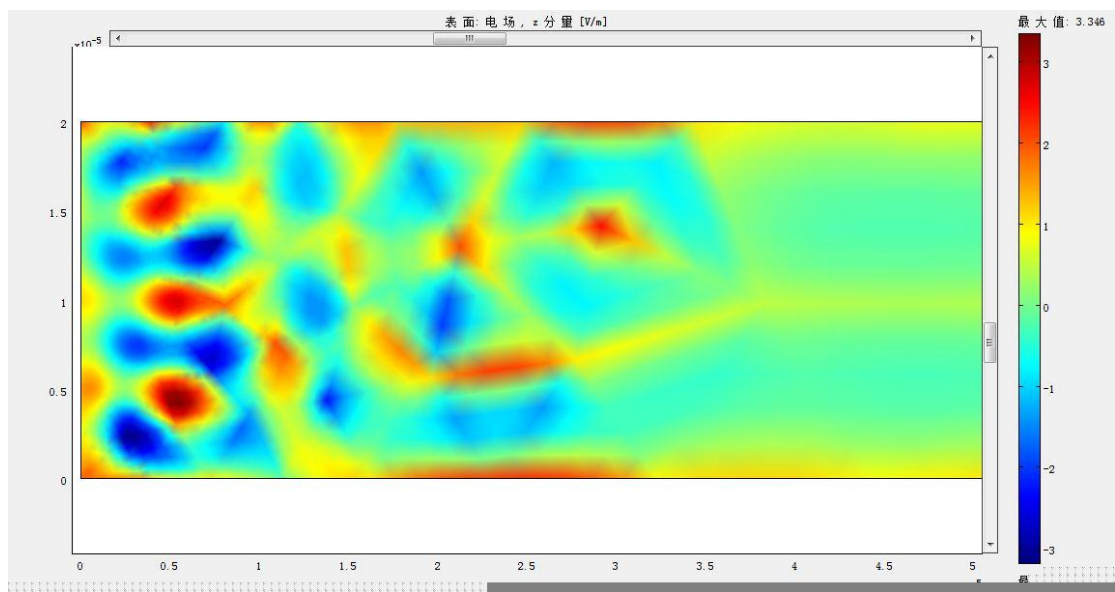


周期 $\tau=33$, 射频 $\omega = 2\omega_0$



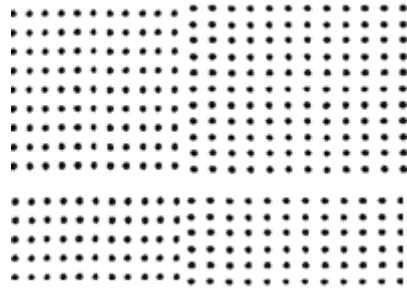
从数值解析图中可以看出, $\omega = 2\omega_0$ 时, 本征方程 $\det(T - e^{ikd}) = 0$ 近似成立, 所以此图中依旧满足周期性边界条件。

对照实验: 相同条件下电磁波入射没有周期性结构的 ZnS 后衰减:



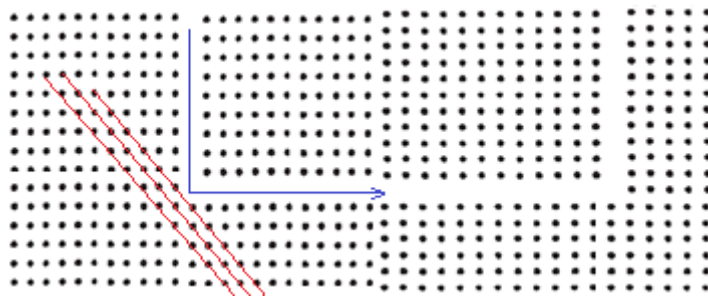
4、经进一步文献检索, 我们学习了二维光子晶体波导光输运特性, 获得如下启示:

- a. 同理可以转移矩阵方法获得电磁波传播特征频率;
通过人为制造晶体缺陷, 形成“光通道”:



同样可以使用转移矩阵方法可以求出电磁波在波导中传输的本征频率。

- b. 受布拉格散射启发，光线不但可以在波导中直线传播，而且可以转弯（散射）；

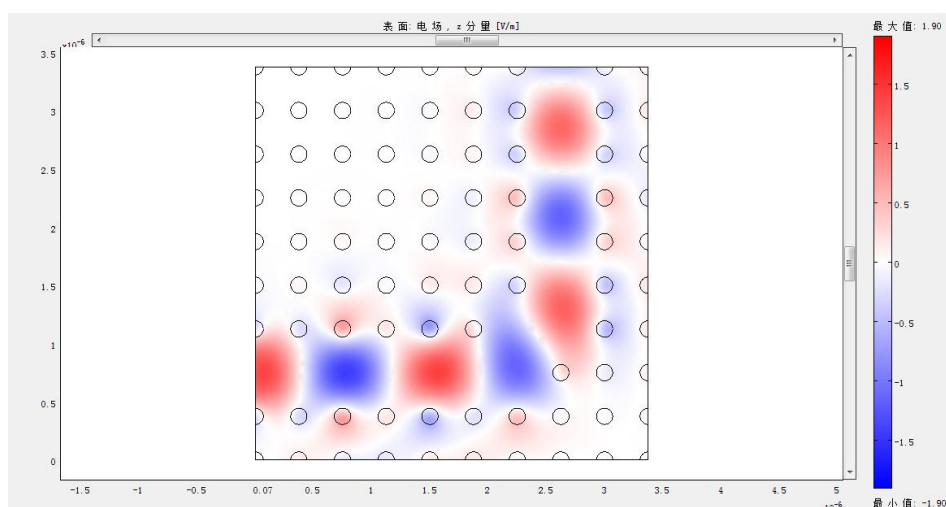


- c. 光线在二维光子晶体波导中呈现“慢光效应”，（群速度 $V_g \leq 0.01c$ ）；

- d. 前文 b、c 项相结合：控制光速。我们是否可以制造这样一种介质，一方面，通过在介质中人为制造缺陷，制造超长的光通道以扩大光程；另一方面，因慢光效应，光波群速度降低；最后，让光波从需要的地方射出介质：如是光在介质中停留时间极大延长了。再经文献检索，这一想法尚未实现。

（“光穿透玻璃要几年时间。透过这窗棂，我们阅读着过去。”这一灵感源于我小时读过一篇科幻。）

在 Comsol 的模型数据库中的射频模块，有二维光子晶体波导中电磁波传播的例子，可以证明我上述构想的正确。



以上总结，做成一个 Note 希望周老师提提意见。我也希望在能课前与大家分享。

综述人：辛建宏

