

考察 $\epsilon=-0.5$ 球壳零散射以及准静态近似条件

08300190076 王蔚佳

简述：用转移矩阵方法，解介质球壳放在均匀外场（静止）下散射问题。其中除了 $\epsilon=1$ 之外散射为零，也得到了一个 $\epsilon=-0.5$ 的解。本文利用 Mie 理论计算考察这种解是否在与电磁波入射情况下以及准静态近似条件。

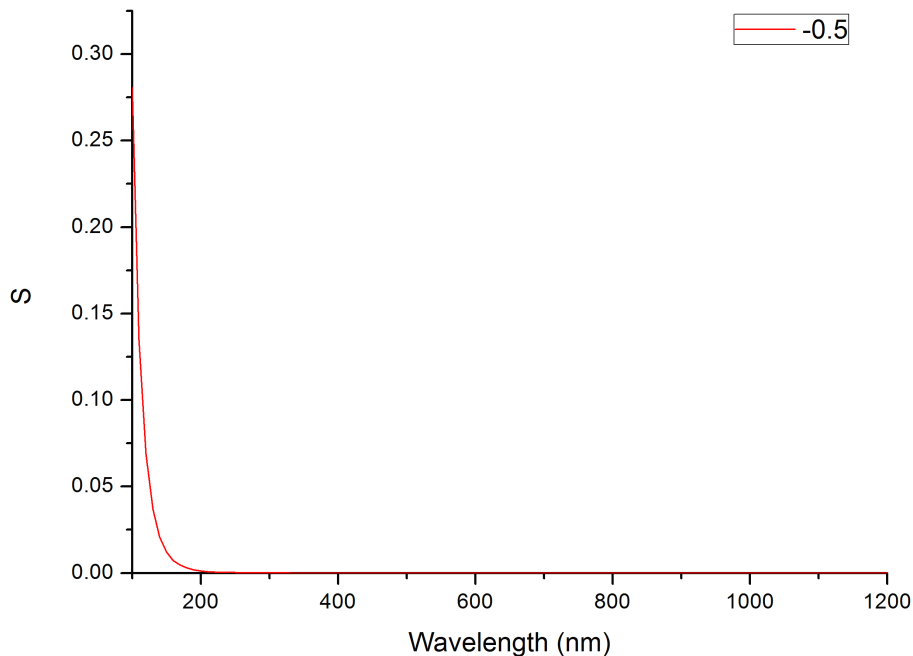
（一）Mie theory 计算散射系数，考察准静态条件。

（从世伟学长那边得到 Mie 计算散射场的程序）

1. 首先验证-0.5 的零散射是否存在。

a. 考察-0.5 计算结果

计算条件：球壳内半径 10nm 外半径 12nm 扫描 100-1200nm 波长的散射



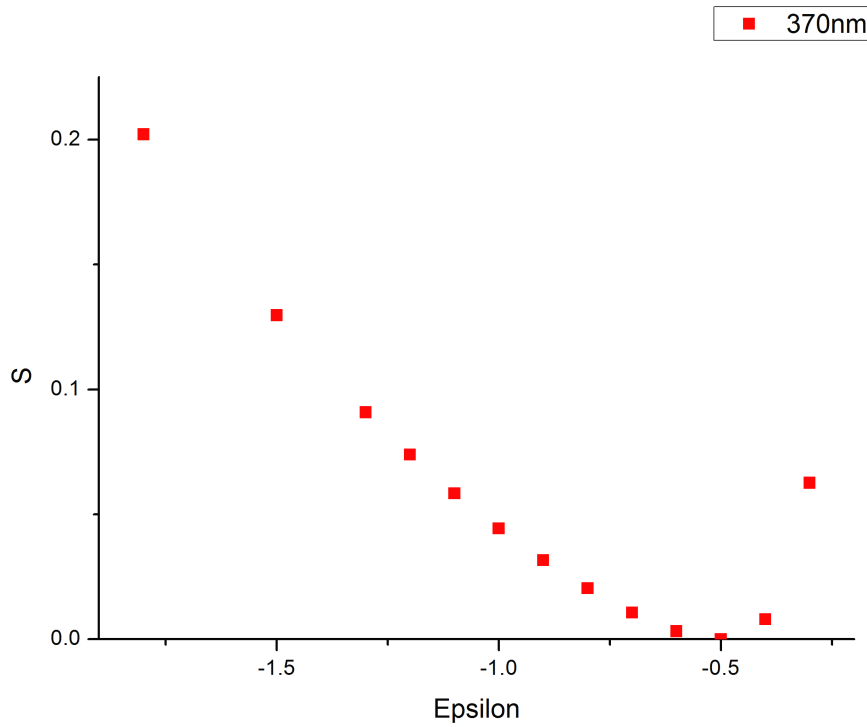
结论：符合

b. 考察-0.5 是否为特殊情况

计算条件：球壳内半径 10nm 外半径 12nm

（选取散射系数为 $1E-5$ 为 0, 对于 $\epsilon=-0.5$ 的介质在 370nm 波长下 散射可以认为是 0。）

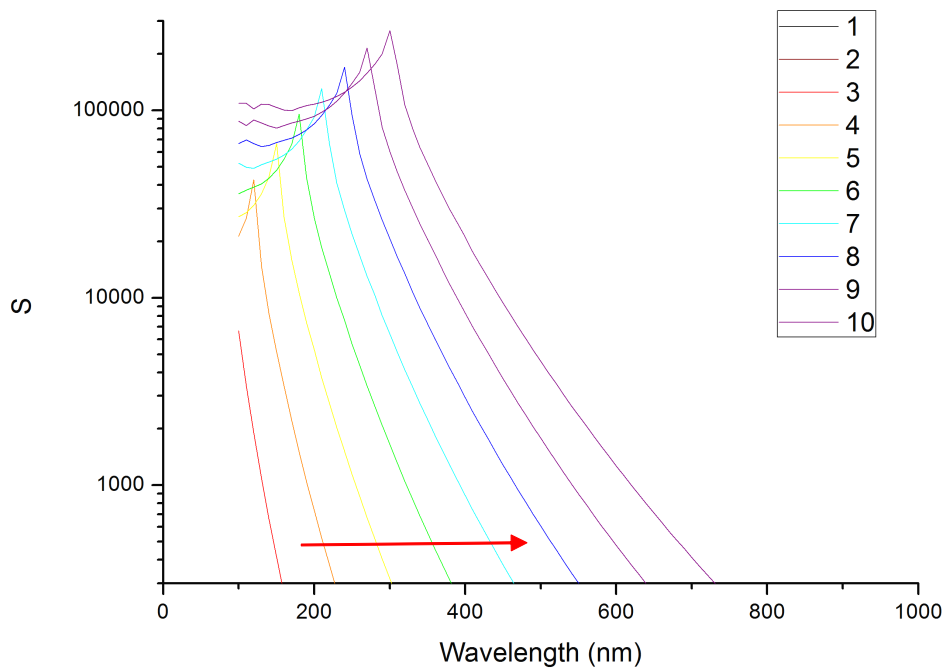
做不同 ϵ 值（取值范围在 -0.5 附近）的球壳扫描，在 370nm 的波长下，对应的散射如图所示。



结论：可以确定-0.5 是一个特别的解，满足零散射。

2. 准静态近似条件 -- 长波近似， $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ 近似究竟在何种尺度差距下成立？

计算条件：球壳内半径 10nm， 外半径 12nm。成倍（1 到 10 倍）放大球壳尺寸。



Y 轴为 log 标度。

图像中非常明显可以看到，随着球壳的尺寸变大，曲线与 X 轴交点向波长大的地方移动。说明利用转移矩阵方法解静台问题，使用解随着球尺寸大小适用波长的范围也红移。

选取散射=1E-5 为零点标准，各种尺寸出现零点的起始波长大小如下表格：

R (nm)	Wavelength λ (nm)	比例 $\frac{\lambda}{2\pi R}$
12	370	4.91
24	880	5.84
36	1460	6.45
48	2080	6.90
60	2750	7.29
72	3460	7.65
84	4190	7.94
96	4950	8.21
108	5740	8.46
120	6540	8.67
180	10860	9.60
240	15560	10.32
600	48910	12.97
1200	116340	15.43
12000	2070000	27.46

近似条件 $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$

结论：随着尺寸变大，长波条件比例也增大。

纳米尺度结构，在波长为其结构 20 倍数的时候就可以近似。

(二) 圆柱是否存在相同结果

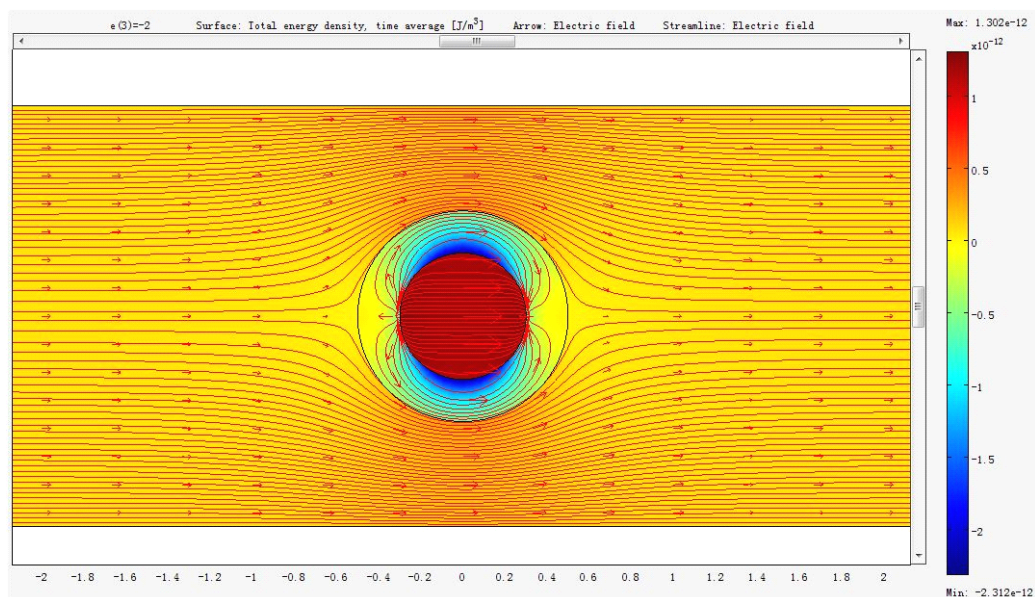
曾經試圖用 Comsol 模拟球殼零散射結果。但是结果总是发散。有待进一步调设。

所以想用 2D 做模拟，解一个在圆柱壳情况。

模拟条件：频率：5000Hz， 内外半径分别是 0.2 m 0.4m，

epsilon=-2 时候得到如下模拟结果。

图上标示电场线与能流。



所得到的 $\epsilon_r = -2$ 的情况下，能看到类似于零散射的情况发生。
但是在理论计算上，仍然使用转移矩阵方法，不过势的表达式变化。

$$\varphi_l = (c_l r + \frac{d_l}{r}) \cos \theta$$
$$T_{21} = R_1^3 (\epsilon_r - \frac{1}{\epsilon_r}) + R_0^3 (2 - \frac{1}{\epsilon_r} - \epsilon_r)$$

并没有 -0.5 的解。

所以 -0.5 的零散射是特别属于球形结构的，在圆柱下并没有这个现象发生。Comsol 模拟的结果有待考证。

【总结】

1. -0.5 零散射现象只存在于球壳情况。
2. 长波近似条件

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

纳米尺度结构，在波长为其结构 20 倍数的时候就可以近似。