转移矩阵解静磁场分布问题 Note　王蔚佳 物理学系 08300190076

1.通式推导

设$\varphi_l=(c_l r+\frac{d_l}{r^2})\cos\theta$ l=0,1,2,...

带入边界条件：$r=R_l$时

$$\varphi_l=\varphi_{l+1}\quad \mu_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial r}=\mu_{l+1}\frac{\partial\varphi_{l+1}}{\partial r}$$

即解方程得到

$$\begin{pmatrix}c_{l+1}\\ d_{l+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(1+\frac{\mu_l}{2\mu_{l+1}}) & \frac{2}{3R_l^3}(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}})\\ \frac{R_l^3}{3}(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}) & \frac{1}{3}(1+\frac{2\mu_l}{\mu_{l+1}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_l\\ d_l\end{pmatrix}$$

$$T_l=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(1+\frac{\mu_l}{2\mu_{l+1}}) & \frac{2}{3R_l^3}(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}})\\ \frac{R_l^3}{3}(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}) & \frac{1}{3}(1+\frac{2\mu_l}{\mu_{l+1}})\end{pmatrix}$$

2. 应用：解十四讲 例题二

$$\begin{pmatrix}c_2\\ d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(1+\frac{\mu_r}{2}) & \frac{2}{3R_l^3}(1-\mu_r)\\ \frac{R_l^3}{3}(1-\mu_r) & \frac{1}{3}(1+2\mu_r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(1+\frac{1}{2\mu_r}) & \frac{2}{3R_l^3}(1-\frac{1}{\mu_r})\\ \frac{R_l^3}{3}(1-\frac{1}{\mu_r}) & \frac{1}{3}(1+\frac{2}{\mu_r})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ d_0\end{pmatrix}$$

得到的转移矩阵：

$$T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$$

其中

$$T_{11}=\frac{4}{9}(1+\frac{\mu_r}{2})(1+\frac{1}{2\mu_r})+\frac{2R_0^3}{9R_1^3}(1-\mu_r)(1-\frac{1}{\mu_r})$$

$$T_{12}=\frac{4}{9R_0^3}(1+\frac{\mu_r}{2})(1-\frac{1}{\mu_r})+\frac{2}{9R_1^3}(1-\mu_r)(1+\frac{2}{\mu_r})$$

$$T_{21}=\frac{2R_1^3}{9}(1-\mu_r)(1+\frac{1}{2\mu_r})+\frac{R_0^3}{9}(1+2\mu_r)(1-\frac{1}{\mu_r})$$

$$T_{22}=\frac{2R_1^3}{9R_0^3}(1-\mu_r)(1-\frac{1}{\mu_r})+\frac{1}{9}(1+2\mu_r)(1+\frac{2}{\mu_r})$$

根据外场为 H 球内场不发散，确定 $\begin{matrix} c_0=-H_0 \\ d_2=0 \end{matrix}$

而相对应 $d_0=\frac{T_{21}}{T_{22}}H_0$

$$c_2=\frac{T_{12}T_{21}-T_{11}T_{22}}{T_{22}}H_0$$

经过运算

$$d_2=\frac{(1+2\mu_r)(1-\mu_r)(R_1^3-R_0^3)}{(1+2\mu_r)(2+\mu_r)-2\frac{R_1^3}{R_0^3}(1-\mu_r)^2}H_0$$

$$c_2=\frac{-9\mu_r}{(1+2\mu_r)(2+\mu_r)-2\frac{R_1^3}{R_0^3}(1-\mu_r)^2}H_0$$

以上结果与传统方法解出来的相同。

转移矩阵的方法就是将传统方法中的待定系数过程系统化，找到了系数 c d 的规律，通过外场条件，内场不发散等等第一类边界条件来确定 c d 序列的首项或者末项，而通过界面与界面之间的第二类边界条件得到递推公式。由此来求得序列中所有的数值。把计算量主要集中在了转移矩阵的连乘上。

3.转移矩阵的一些想法：
将矩阵的每个元作为透射、反射的系数标准：
t 代表透射标准 r 代表反射标准

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H_0 \\ r \end{pmatrix}$$

那么 $r = \dfrac{T_{21}}{T_{22}} H_0 \qquad t = \dfrac{T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}}{T_{22}} H_0$

考察两种情况：

（1）透射效果

就是 r=0 ，那么就要求 T21=0 。对于 T21 的表达式看出。T21=0 一直存在两个解，而且与几何结构无关，只和μ相关，分别是μ等于-0.5 与 1。 1 作为解答自然比较容易理解，就是相当于没有介质球。而-0.5 不能理解，因为不清楚是否在自然界中存在这样的物质。不存在这样的物质，那么-0.5 这个解答就是没有意义的。

此外，通过极限想法，透射效果应该在球壳非常薄的时候也存在。但是 T21 的表达式中，r=0 对 几何结构没有特殊的要求，這點很奇怪。

（2）屏蔽效果

同样存在两种极限情况（I）μ趋向于无穷，做近似可以得到 $T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22} = 0$ ，t=0 复合屏蔽的概念（II）R1<<R0 球壳很厚，舍去 R1/R0 项 舍去常数项 也可以得到 $T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22} = 0$， t=0.