

## 多层球壳体系电势问题的转移矩阵解法

一、先考虑界面上没有自由电荷的问题：

对于球对称的体系拉普拉斯方程为：

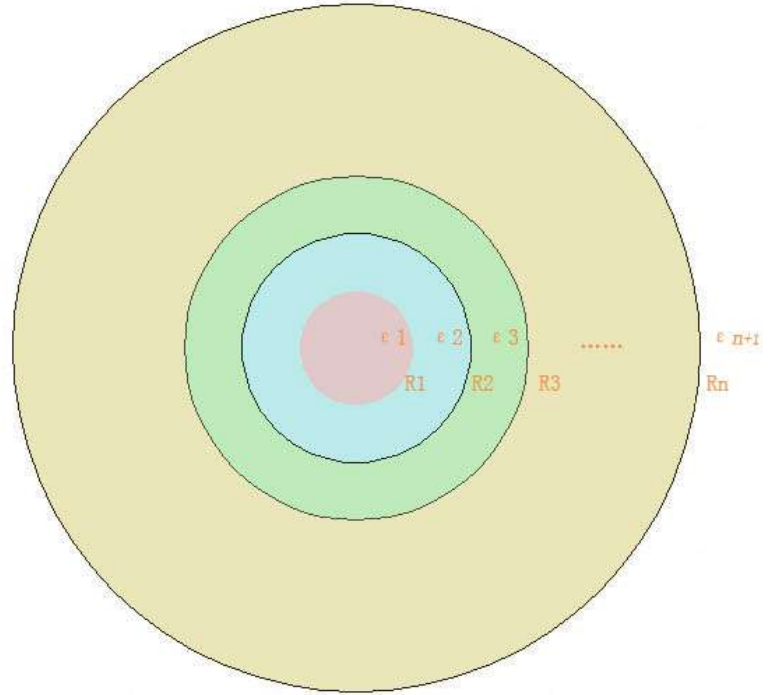
$$\nabla^2 \varphi_i = 0 \cdots \cdots (1)$$

$\varphi_k$  表示第  $k$  层介质中的电势，满足边界条件：

在  $r = R_i$  时，有

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} \cdots \cdots (2)$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \varepsilon_{i+1} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial r} \quad (3)$$



对于球对称的体系，拉普拉斯方程的通解为：

$$\varphi_i = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l^i r^l + \frac{D_l^i}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_i^{(l)} = \cdots \cdots (4)$$

由于  $P_l(\cos\theta)$  相互独立，可以对于每一个  $l$  对应的系数分别考虑，其中对于  $P_l(\cos\theta)$  一项对应的系数，对于第  $k$  层和第  $k+1$  层，在  $r = R_k$  处由边界条件(2)(3)得：

$$\begin{pmatrix} R_k^l & \frac{1}{R_k^{l+1}} \\ \varepsilon_k l R_k^{l-1} & -\varepsilon_k (l+1) \frac{1}{R_k^{l+2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_k^l & \frac{1}{R_k^{l+1}} \\ \varepsilon_{k+1} l R_k^{l-1} & -\varepsilon_{k+1} (l+1) \frac{1}{R_k^{l+2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

由矩阵的乘法，易得：

$$\begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = T_{k+1,k}^{(l)} * \begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} \cdots \cdots (5)$$

其中  $T_{k+1,k}^{(l)} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{k+1} * (l+1) + \varepsilon_k * l}{\varepsilon_{k+1} * (2l+1)} & \frac{\varepsilon_{k+1} * (l+1) - \varepsilon_k * (l+1)}{\varepsilon_{k+1} * (2l+1)} * R_k^{-(2l+1)} \\ \frac{\varepsilon_{k+1} * l - \varepsilon_k * l}{\varepsilon_{k+1} * (2l+1)} R_k^{2l+1} & \frac{\varepsilon_k * (l+1) + \varepsilon_{k+1} * l}{\varepsilon_{k+1} * (2l+1)} \end{pmatrix} \quad (6)$

我们称 $T_{k+1,k}$ 为第  $k$  层到  $k+1$  层的转移矩阵，其实向内层的转移矩阵  $T_{k,k+1}$  也易于求解，和  $T_{k+1,k}$  形式相似。

对于最外层和最内层 $l$ 项的系数，仅需使用转移矩阵的连乘，即：

$$\begin{pmatrix} C_l^{n+1} \\ D_l^{n+1} \end{pmatrix} = T_{n+1,n} * T_{n,n-1} * \dots * T_{2,1} \begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix} = T_{n+1,1} * \begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

此处定义 $T_{m,n} = T_{m,m-1} * T_{m-1,m-2} * \dots * T_{n+1,n}$

讨论：

- 1、对于  $k$  层 $\varepsilon_k \rightarrow \pm\infty$ 的情况： $T_{k+1,k} = \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{pmatrix}$ ，

显然，此时必定有 $\begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，否则  $k+1$  层的系数必然发散。此时  $k$  层内部电势恒定，对应于金属。

$$\text{对于 } k+1 \text{ 层 } \varepsilon_{k+1} \rightarrow \pm\infty \text{ 的情, } T_{k+1,k} = \begin{pmatrix} \frac{l+1}{2l+1} & \frac{l+1}{2l+1} * R_k^{-(2l+1)} \\ \frac{l}{2l+1} * R_k^{(2l+1)} & \frac{l}{2l+1} \end{pmatrix},$$

显然，因为此时必定有 $\begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，因此总可以得到 $\frac{C_l^k}{D_l^k} = -R_k^{-(2l+1)}$ ，但对于  $k+2$  层的介质，其系数并不受内部  $k$  层介质系数的影响，这正体现了金属对电场的屏蔽作用，内部电场的状态不影响外部介质。

- 2、对于 $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ 的极限情况，有 $T_{k+1,k} = I$ ，由  $k$  到  $k+1$  层，相应的系数不变，符合预期。
- 3、计算  $T$  的行列式得  $\det(T_{k+1,k}) = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}$ ；

对于各层介质，若 $\varepsilon_k \neq \infty$ ，则显然有 $\det(T_{k+m,k}) = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+m}} \neq 0$ 。

以下仅考虑介质的情况，即对于任一层有 $\varepsilon_k \neq \infty$

- 4、对于最外层的介质，若对 $P_l(\cos\theta)$ 分量不存在激发条件，则由边界条件，

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_{n+1}^{(l)} = 0 \Rightarrow C_l^{n+1} = 0;$$

$$r \rightarrow 0 \text{ 时, } \varphi_1^{(l)} \text{ 有限} \Rightarrow D_l^1 = 0;$$

$$\text{则代入(7)式有 } \begin{pmatrix} C_l^{n+1} \\ D_l^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_l^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix} = T_{n+1,1} * \begin{pmatrix} C_l^1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

显然  $T_{k+1,k}$  矩阵每一个元素均为有限值，故  $T_{ij}$  均有限，则

$$C_l^{n+1} = 0 = T_{11} * C_l^1, D_l^{n+1} = T_{21} * C_l^1 \Rightarrow C_l^1 = 0, D_l^{n+1} = 0$$

类似的可以证明其中各层对应于 $l$ 的系数一定为0，不存在此项的激发。

其实根据标号3的讨论，由于对于任两层， $\det(T_{k+1,k}) = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}} \neq 0$ ，因此对

于任何的一项 $\begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = 0$ ，必有 $\begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} = 0$ ，进而推出 $\begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix} = 0$ ，朝反方向亦可

推出，故其实只要确定其中任何一层中第 $l$ 阶系数C和D均为0，则每一层激发的电势都不含第 $l$ 分量。

这就证明了我们平常所做的对势的选取方法的正确，仅需保留到最高的外界激发源的次数即可。

5、 仅得出这些结果显然不够，为了验证方法的正确性，我们还要对于具体的激发做出结论，以证实其正确性。

不妨与 p97 例 5 进行对照。

半径为R、介电常数为 $\epsilon_1$ 的均匀介质球，被置于均匀外场 $E_0$ 中，球外空间充满介电常数为 $\epsilon_2$ 的介质，求空间电势分布。

首先， $r \rightarrow \infty$ 时， $\varphi \rightarrow \varphi_0 - E_0 r \cos\theta$ ，仅存在对应于 $l = 0$ 的激发项，因而可知 $C_l^k = D_l^k = 0, l \geq 2, k = 1 \& 2$

$r \rightarrow 0$ 时， $\varphi_1$ 有限， $D_l^1 = 0$ 。

计算对应于 $l = 0$ 的转移矩阵，

$$T_{2,1}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon_2 + \epsilon_1}{3\epsilon_2} & \frac{2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{3\epsilon_2} R^{-3} \\ \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{3\epsilon_2} R^3 & \frac{2\epsilon_1 + \epsilon_2}{3\epsilon_2} \end{pmatrix}, T_{2,1}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} R^{-1} \\ 0 & \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{pmatrix}$$

则分别有

$$\begin{pmatrix} C_0^2 \\ D_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ D_0^2 \end{pmatrix} = T_{2,1}^{(0)} * \begin{pmatrix} C_0^1 \\ D_0^1 \end{pmatrix} = T_{2,1}^{(0)} * \begin{pmatrix} C_0^1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_0^1 = \varphi_0, D_0^2 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} C_1^2 \\ D_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_0 \\ D_1^2 \end{pmatrix} = T_{2,1}^{(1)} * \begin{pmatrix} C_1^1 \\ D_1^1 \end{pmatrix} = T_{2,1}^{(1)} * \begin{pmatrix} C_1^1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow C_1^1 = \frac{-E_0}{T_{2,1}^{(1)}(1,1)} = -\frac{3\epsilon_2 E_0}{2\epsilon_2 + \epsilon_1},$$

$$D_1^2 = \frac{-E_0}{T_{2,1}^{(1)}(1,1)} * T_{2,1}^{(1)}(2,1) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0 R^3$$

则得出:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0 R^3 * \frac{1}{r^2} \cos\theta$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - \frac{3\varepsilon_2 E_0}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} r \cos\theta$$

与教材结论一致。

6、 对于上述的例子，采用矩阵的方法结合两个  $r$  极限下的边界条件，可以方便的求解出答案，但是并不会比教材上的方法快捷太多。但是对于层数很多的情况，这样的方法使得解题的思路更为程式化，方便采用计算机编程进行解答，能大大简化计算的难度。

二、 现在考虑介质内部分布有自由电荷的情况，此时电势满足非齐次的拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \varphi_i = -\rho_i / \varepsilon_i \cdots \cdots (8)$$

在  $r = R_i$  时，有

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} \cdots \cdots (9) \quad \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \varepsilon_{i+1} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial r} = \sigma_i \cdots \cdots (10)$$

非齐次方程(8)的解由特解和通解两部分叠加组成，本文仅考虑通解，则相当于在边界条件(9)和(10)的情况下解齐次拉普拉斯方程(1)，唯一的不同在于(10)中多出了面点荷的非齐次项。

由于勒让德函数的正交性， $\sigma_i$  也可以通过其展开， $\sigma_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_i^l P_l(\cos\theta)$ ，在实际中大部分已知电荷情况的时候， $\sigma_i$  仅仅包括  $l$  为 0 或 1 的项，而且仅仅包括不多的  $k$  界面，此时大部分的阶数可以依旧依据无电荷的情况求解。

依旧对于  $P_l(\cos\theta)$  一项对应的系数，对于第  $k$  层和第  $k+1$  层，代入  $r = R_k$  处边界条件(9) (10)，方程(4)变为:

$$\begin{pmatrix} R_k^l & \frac{1}{R_k^{l+1}} \\ \varepsilon_k l R_k^{l-1} & -\varepsilon_k (l+1) \frac{1}{R_k^{l+2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_k^l & \frac{1}{R_k^{l+1}} \\ \varepsilon_{k+1} l R_k^{l-1} & -\varepsilon_{k+1} (l+1) \frac{1}{R_k^{l+2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_k^l \end{pmatrix} \cdots \cdots (11)$$

解得：

$$\begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = T_{k+1,k}^{(l)} * \begin{pmatrix} C_l^k \\ D_l^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\sigma_k^l * R^{1-l}}{2(l+1)*\epsilon_{k+1}} \\ \frac{\sigma_k^l * R^{l+2}}{2(l+1)*\epsilon_{k+1}} \end{pmatrix} \dots\dots(12)$$

其中 $T_{k+1,k}^{(l)}$ 的形式与无电荷的情况一致，即第 k 个界面面点荷的影响为矩阵  $M_k$ 。

讨论：

- 1、上述(12)式很难化成  $f(k+1)=T*f(k)$ 的形式，对于含有面点荷的阶数，只能通过方程(12)计算，但上式已定量的说明了第 k 界面面点荷的影响。
- 2、此时，m 层和 n 层系数的关系为（不妨  $m>n$ ）：

$$\begin{pmatrix} C_l^m \\ D_l^m \end{pmatrix} = T_{m,n} * \begin{pmatrix} C_l^n \\ D_l^n \end{pmatrix} + \sum_{n \leq k < m} T_{m,k+1} * M_k \dots\dots(13)$$

在含面点荷的层数不太多的情况下，上式依旧可以给出第 m 层和第 n 层系数较为简单的关系，大大的简化运算的过程。

- 3、对于金属层，由于层内电势一定， $\varphi=Const$ ，因此对于这样的一层，仅仅有  $C_0^k=\varphi$ ，其余的系数均为 0，若其上含有第 k 阶( $k \neq 0$ )的面点荷分布，则可以直接得到  $\begin{pmatrix} C_l^{k+1} \\ D_l^{k+1} \end{pmatrix} = M_k$ ，对于金属这样的计算尤其方便。

其实，金属表面自由电荷形成的面点荷的分布会受到最外层场的影响，这样，其实只需要通过转移矩阵由 k+1 层的系数- $M_k$  得出最外层电势的 l 阶上的系数，与外层电场激发电势项比较，即可以得到  $M_k$  的值，相应的可以得到面点荷第 l 阶的分布。简单的，我们可以知道，对于金属表面的面点荷分布，也是受到外场的影响，仅仅激发出和外场对应的阶数的分布。

### 三、考虑有效介质理论

将一个特定的介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球外再包裹一层介电常数为  $\epsilon_2$  的介质球壳，然后再将这个复合介质放置在介电常数为  $\epsilon_3$  的无限大背景中，求在什么条件下散射场（有效偶极子）为 0？或者  $\epsilon_3=1$ （空气）时， $\epsilon_2$  满足什么条件有效偶极子消失？(内外球壳半径分别为  $R_1, R_2$ )

这是一个两层的介质球壳，且不存在自由电荷的分布，采用一中讨论的方法考虑外加均匀电场  $E$  激发下的电势响应。

由于  $r \rightarrow \infty$  时， $\varphi \rightarrow \varphi_0 - E_0 r \cos\theta$ ，仅仅存在对应的勒让德函数  $l = 0$  及  $1$  阶的响应，由一的讨论知道  $\varphi_i = \sum_{l=0}^1 \left( C_l^i r^l + \frac{D_l^i}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$  的形式。

为了标号简便，记  $\varphi_i = A_i + B_i r \cos\theta + \frac{C_i}{r} + \frac{D_i}{r^2} \cos\theta$  为各层的电势。由  $r$  在  $0$  和无穷大处的边界条件可知， $A_3 = \varphi_0$ ， $B_3 = -E$ ， $C_1 = 0$ ， $D_1 = 0$ 。

通过转移矩阵的方法可以方便的求出  $A_1 = A_2 = A_3 = \varphi_0$ ， $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ；

$$B_1 = \frac{-E}{T_{3,1}^{(1)}(1,1)}; B_2 = B_1 * T_{2,1}^{(1)}(1,1); D_2 = B_1 * T_{2,1}^{(1)}(2,1); D_3 = B_1 * T_{3,1}^{(1)}(2,1);$$

这样我们就能得到全空间各个区域中的电势解析关系。

讨论：

1、两层介质球上的束缚电荷对球外空间的贡献，相当于一个放在原点的偶极子，该偶极子大小为  $p = 4\pi\epsilon_3 * D_3$

$$= 4\pi\epsilon_3 E \frac{R_1^3(\epsilon_1 - \epsilon_2)(2\epsilon_2 + \epsilon_3) + R_2^3(\epsilon_2 - \epsilon_3)(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)(\epsilon_2 + 2\epsilon_3) + \frac{R_2^3}{R_1^3}(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

2、不妨考虑金属的情况，即  $\epsilon_2$  和  $\epsilon_1$  都趋向于无穷大的情况，得到

$$P = 4\pi\epsilon_3 E R_2^3$$

这与我们在 p95 页例 4 中得到的结果一致。

3、若要散射场（有效偶极子）为  $0$ ，必须有  $p=0$ ，即  $R_1^3(\epsilon_1 - \epsilon_2)(2\epsilon_2 + \epsilon_3) + R_2^3(\epsilon_2 - \epsilon_3)(2\epsilon_2 + \epsilon_1) = 0$ ，不妨另  $k=R_2/R_1$ ， $F(\epsilon_2, \epsilon_1) = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}$

则以上条件给出

$$k^3 = F(\epsilon_2, \epsilon_1)/F(\epsilon_2, \epsilon_3)$$

这就是满足有效偶极子为零的条件，在这样的条件下，内部两层球体对外部电场不施加影响，此时球内两层介质的等效介电常数为  $\epsilon_3$ 。其实不妨定义内部两层球体对于外界的有效介电常数为  $\epsilon_{\text{等}} = \frac{\epsilon_2(k^3 - 2F(\epsilon_2, \epsilon_1))}{k^3 - F(\epsilon_2, \epsilon_1)}$ ，当  $\epsilon_3 = \epsilon_{\text{等}}$  的时候，对外场影响的有效偶极子为零。

定性的，由于  $k > 1$ ， $F(\epsilon_2, x)$  在正区间单调减函数，对于一般的介电常数为正数的介质，必须满足

$$(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_1 - \epsilon_2) < 0, \epsilon_1 > \epsilon_3$$

因此仅仅依靠定性的讨论我们可以知道三层材料间的介电常数满足

$$\epsilon_1 > \epsilon_3 > \epsilon_2 \text{ 或 } \epsilon_2 > \epsilon_1 > \epsilon_3$$