立方体谐振腔中基模的场分布和能流分布的数值模拟

08300190026 吕正大

书上第 233 页和讲义中第二十一讲都给出了谐振腔内场的空间部分：

$$\begin{cases} B_{0x} = -2iB_0 \dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0y} = -2iB_0 \dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0z} = 2iB_0 cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0x} = 2B_0 \dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0y} = -2B_0 \dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0z} = 0 \end{cases}$$

谐振腔内场的空间部分的解析解满 4 足磁场和电场在谐振腔端面的边界条件：

$$\vec{e}_n \times \vec{E}\big|_{z=0,d} = 0，\vec{e}_n \cdot \vec{B}\big|_{z=0,d} = 0$$

其中 k_0，k_c，k_z 分别等于：

$$k_z = \frac{p\pi}{d}$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k_0^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

所以谐振腔中允许存在的谐振频率为：

$$\omega = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}}$$

由此，在谐振腔中磁感应强度的系数 B_0 已知的情况下，就可以得到谐振腔内各点的电场与磁场。

并且若将谐振腔中的电磁波行为与等离子体中具有虚波矢的电磁波行为类比，可以看到二者的磁场强度和电场强度均有$\frac{\pi}{2}$的相位差。推断出在谐振腔内部平均没有能流，即电磁波在腔中形成驻波，在三个方向上都没有净能量流动。

但是，在周期很短时，当谐振腔内的电磁波来不及“往返”传播一次时，由于各处的电场和磁场都不为零，则必然会在谐振腔内部形成能流 S_p，并且能流大

小方向均随时间和位置变化，其平均值<S_p>=0。我尝试采用 Matlab 软件对谐振腔内部的电场和磁场强度，以及能流密度进行了数值模拟，希望可以以更加直观的方式展现一个周期内谐振腔内电场、磁场和能流密度变化的情况。

考虑时间因素后，任意时间 t 时谐振腔内电磁场应当乘上时间部分 $e^{-i\omega t}$ 因此可知：

$$\begin{cases} B_x = B_{0x} \cdot e^{-i\omega t} = -B_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \\ B_y = B_{0y} \cdot e^{-i\omega t} = -B_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \\ B_z = B_{0z} \cdot e^{-i\omega t} = -B_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \end{cases}$$

及：

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot e^{-i\omega t} = -E_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cdot e^{-i\omega t} = -E_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cdot e^{-i\omega t} = -E_{0x} \cdot (isin\omega t - cos\omega t) \end{cases}$$

能流密度 S_p(波印廷矢量)为：

$$S_p = \frac{1}{\mu_0}(E \times B)$$

由于电场和磁场有效地部分只有它们的实部，而波印廷矢量只与真实的场有关，所以在这里不能直接使用复数的 E 和 B 计算能流密度，而是要将它们先取实部再代入公式，这也是我将时间部分 $e^{-i\omega t}$ 写成 isinωt+cosωt 形式的原因。这样真实的磁场和电场在 x，y，z 三个坐标轴上的分量为：

$$\begin{cases} B_x = 2B_0 \dfrac{m\pi}{a} \dfrac{k_z}{k_c^2} sin\left(\dfrac{m\pi}{a} x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right) cos\left(\dfrac{p\pi}{d} z\right) sin(\omega t) \\ B_y = 2B_0 \dfrac{n\pi}{b} \dfrac{k_z}{k_c^2} cos\left(\dfrac{m\pi}{a} x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right) cos\left(\dfrac{p\pi}{d} z\right) sin(\omega t) \\ B_z = -2B_0 cos\left(\dfrac{m\pi}{a} x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d} z\right) sin(\omega t) \\ E_x = 2B_0 \dfrac{n\pi}{b} \dfrac{ck_0}{k_c^2} cos\left(\dfrac{m\pi}{a} x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d} z\right) cos(\omega t) \\ E_y = -2B_0 \dfrac{m\pi}{a} \dfrac{ck_0}{k_c^2} sin\left(\dfrac{m\pi}{a} x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right) sin\left(\dfrac{p\pi}{d} z\right) cos(\omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

可以看到时间部分对电场起作用的只有 cos(ωt)，而对磁场部分起作用的只有 sin(ωt)，用这些实数量可以计算出能流密度 S_p 的解析式：

$$\begin{aligned} S_p &= \tfrac{1}{\mu_0}(E \times B) \\ &= \tfrac{1}{\mu_0}(E_y B_z \cdot \hat{e}_x - E_x B_z \cdot \hat{e}_y + (E_x B_y - E_y B_x) \cdot \hat{e}_z) \end{aligned}$$

得到能流密度 S_p 的三个分量：

$$
\begin{cases}
S_{px}=4\dfrac{1}{\mu_0}B_0^2\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\
\qquad cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)cos(\omega t)sin(\omega t) \\
S_{py}=4\dfrac{1}{\mu_0}B_0^2\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\
\qquad cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)cos(\omega t)sin(\omega t) \\
S_{px}=4\dfrac{1}{\mu_0}B_0^2(\dfrac{n^2\pi^2}{b^2}\dfrac{ck_0k_z}{k_c^4}cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\
\qquad cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)cos(\omega t)sin(\omega t) \\
\qquad +\dfrac{m^2\pi^2}{a^2}\dfrac{ck_0k_z}{k_c^4}sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\
\qquad cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)cos(\omega t)sin(\omega t))
\end{cases}
$$

这里可以将能流密度 S_p 的表达式化为 2x，2y，2z，2t 的函数，但这样会使表达式过于复杂，我们交给计算机来做这一步工作。同时可以看出实际上能流密度 S_p 随 x，y，z，t 的变化周期分别是$\frac{a}{m}$，$\frac{b}{n}$，$\frac{d}{p}$，与电场(磁场)随 x，y，z，t 的变化周期$\frac{2a}{m}$，$\frac{2b}{n}$，$\frac{2d}{p}$为两倍的关系。所以，时间上，电场电场(磁场)变化一个周期的时间内能流密度 S_p 已经变化了两个周期；空间上，电场电场(磁场)的“波峰数”恒定为能流密度 S_p 的“波峰数”的一半。

而同时，如果我们不考虑电磁场传播和反射时的衰减，即谐振腔内不需要额外的波源来激励电磁场，这样电磁场内任何一点的能量 u(***r***,t)应当满足电磁场能量守恒的连续性方程：

$$\nabla\cdot\vec{S}_p(\vec{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r},t)$$

知道了连续性方程后也就可以求出谐振腔内各点电势。

软件产生的是三维图像，虽然可以通过直方图或者切片图显示空间中各点的能流密度 S_p 和能量 u，但那将使动画变得复杂并且难以看懂，所以我们可以选择了几个比较有代表意义的平面观察能流密度 S_p 和能量 u 的变化情况。

注意到我们计算的是 TE 波在谐振腔传播的情况，所以这时 p 不能为 0，否则将没有电场、磁场以及能量的变化。同时，由于立方体的对称性，将谐振腔旋转 90 度就可以得到相同条件下 TM 波的电场、磁场以及能量的变化。故我们可

以选取 z=0.5 和 z=0.7 两个平面来观察电场、磁场以及能量的变化。并且由此推测单周期内谐振腔内能量的流动。

考虑最简单的情况，a=b=d=1m，因为从场的表达式可以看出 a，b，c 取其它数值只是等比例改变图像各分量的大小，不改变场变化的形式。

我尝试用 Matlab 软件模拟以下情况：

1，z=0.5 时 基模 101 能流密度&能量的变化；

2，z=0.7 时 基模 101 能流密度&能量的变化；

3，z=0.5 时 基模 101 能流密度在 xy 平面上的变化；

4，z=0.5 时 基模 101 磁场强度的变化；

5，z=0.7 时 基模 101 磁场强度的变化；

6，z=0.5 时 基模 101 电场强度的变化；

7，z=0.7 时 基模 101 电场强度的变化；

8，z=0.5 时 基模 011 能流密度&能量的变化；

9，z=0.7 时 基模 011 能流密度&能量的变化；

10，z=0.5 时 模式 111 能流密度&能量的变化；

11，z=0.7 时 模式 111 能流密度&能量的变化；

12，z=0.5 时 模式 111 能流密度&能量在 xy 平面上的变化；

从动画 1 与 8、2 与 9 可以看出，基模 011 和基模 101 只不过是在 xy 轴上做了一个交换，其他参量没有改变，对电场和磁场强度的其他数值模拟(这里没有列出)也证明了这一点 。可以预测，TM 波的基模与 TE 波基模的振动形式应当完全一致，即在长方体谐振腔中，它们之间可以通过坐标轴的变换而相互转化。

从动画 4~7 中可以看出，谐振腔中电场和磁场的变化却呈现出不同，由边界条件可以得知，电场 E 在谐振腔边缘只有法相分量，而磁场 B 则只有切向分量。相似的地方在于，并且，无论 z 取何值，电场 E 的振动方式几乎不改变，依旧在同一方向上振动，而磁场 B 的水平方向分量则会发生变化。当然这仅仅是对 TE 波而言，对 TM 波，则振动方式不改变的就是磁场 B 了。

关于能流密度 S_p，可以发现基模时，能量其实是在 4 个对称的半腔内来回反

射(TE/TM 波)，正好验证了前文能量随空间变化率是电磁场两倍的论断。为此我特意模拟了模式 111 下能流密度 S_p 和能量 u 的变化，发现在模式 111 下能量其实是在 8 个对称的半腔内反射。对其他更高的模态的模拟也可以得出同样结论。

此外，对于更高的模式的模拟还发现，随着 m，n，p 的增大，在 B_0 不改变的情况下，能量的最大值 u_{max} 是在不断减小的。正因此，谐振腔才拥有非常好的检波能力。

2010-12-28