

## 仔细讨论复电导率的实部和虚部的物理涵义。

若虚部不对应能量的耗散，那么它的作用到底是什么？

张擎

08300190029

电子在金属中受到电场力和杂质施与的阻力。对于受到不同的两种力，运用运动的独立性原理，电子在金属中的运动可分成：1、简谐振动；2、减速运动。

1、虚部的物理意义：

对应着电场的能量向电子的动能的转化。对应着电子在外加交变电场的作用下做简谐振动。在此分运动的过程中，电子——电场的总能量并没有减小，而是相互转化。

2、实部的物理意义：

实部对应着实际的能量耗散。电子撞击到杂质后受到阻力，运动把能量转移给杂质，最终以焦耳热的形式耗散。

下面对于所问的问题给出对电导率虚部的分析：

虚部表达式：

$$\text{Im}(\sigma) = i \frac{n_e q^2}{m(\omega + \frac{1}{\tau^2 \omega})} = e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{n_e q^2}{m(\omega + \frac{1}{\tau^2 \omega})};$$

代入  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma(\omega) \times \vec{E}(\vec{r}, t)$ ，得：

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{n_e q^2 E_0}{m(\omega + \frac{1}{\tau^2 \omega})} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

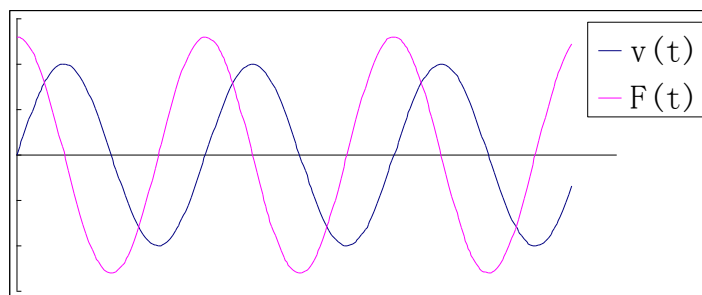
类比在简谐振子中速度  $v$  与振子受力  $F$  的关系式：

$$F(t) = ma(t)$$

代入  $F(t) = F_0 e^{-i(\omega t)}$ ； $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$  得：

$$F_0 e^{-i(\omega t)} = m \frac{dv(t)}{dt}$$

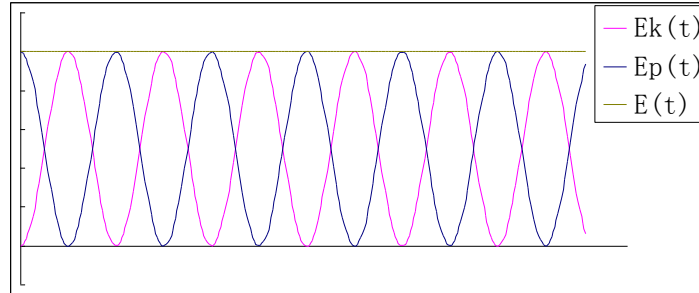
$$v(t) = \frac{F_0}{-i\omega m} e^{-i(\omega t)} = \frac{F_0}{\omega m} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$



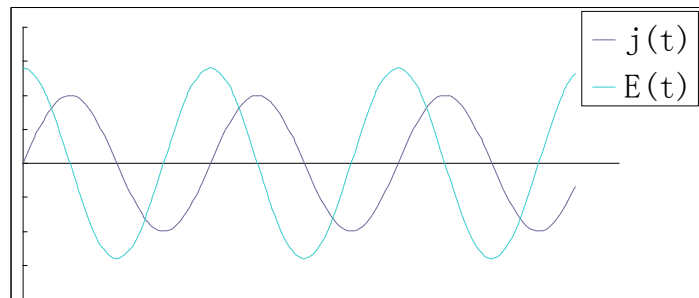
总能量:  $E = \frac{1}{2} m \operatorname{Re}^2(v) + \frac{1}{2} kx^2$

能量转化: 动能:  $E_k = \frac{1}{2} m \operatorname{Re}^2(v) = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\omega m}\right)^2 \cos^2(\omega t - \frac{\pi}{2})$

势能:  $E_p = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\omega m}\right)^2 \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{2})$



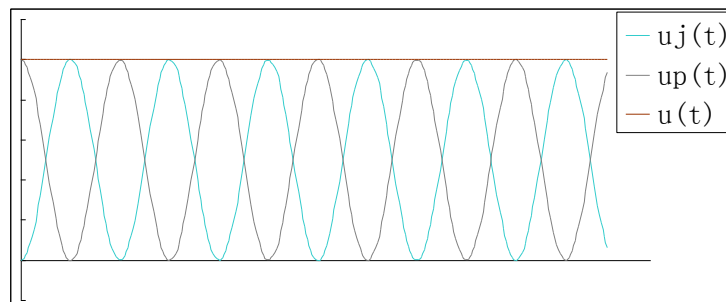
做类比, 可知, 对于谐振电流密度  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{n_e q^2 E_0}{m(\omega + 1/\tau^2 \omega)} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$



总能量密度:  $u = \frac{n_e q^2 E_0^2}{m(\omega + 1/\tau^2 \omega)}$

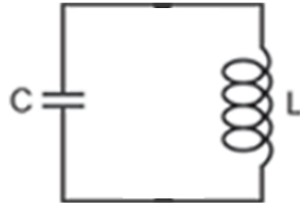
电势能密度:  $u_p = |\sigma| \operatorname{Re}^2(\vec{E}(\vec{r}, t)) = \frac{n_e q^2 E_0^2}{m(\omega + 1/\tau^2 \omega)} \cos^2(\omega t)$

电流能密度:  $u_j = \frac{\operatorname{Re}^2(\vec{j}(\vec{r}, t))}{|\sigma|} = \frac{n_e q^2 E_0^2}{m(\omega + 1/\tau^2 \omega)} \cos^2(\omega t - \frac{\pi}{2})$



对于这样的公式，其内在物理并不是很明了。我们引入第 LC 振荡电路模型，来理解其中的能量转化关系。

LC 震荡电路：



$$\text{总能量: } E = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\text{电感能量: } E(I) = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\text{电容能量: } E(Q) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

仔细分析两种能量便知，电感所带的能量为电流激发出来的磁场中的能量，而电容所带有的时其中的电场能量。

类比简谐电流，可知电流密度所对应的能量密度  $u_j$  实际上是其激发的涡旋磁场的能量，另一部分是驱动电场的能量。类比于 LC 电路，我们可以很容易理解，复电导率对应的时磁场能和电场能的相互转化。

可知，1、电导率的虚部为在交变电场的驱动下，产生的交变电流密度与电场的比例系数。电导率虚部的模长  $|\sigma|$  对应着  $\frac{1}{m/V} = \frac{1}{\rho}$ （由于在讨论中，对于谐振子的守恒量是能量，

而谐振电流的守恒量是能量密度，相差一个因子——体积  $V$ ，需要从质量中除去）。更进一步的对应是**电阻率对应着密度**。其中有很好理解的物理，电阻（电阻率与体积的乘积）或质量（密度与体积的乘积），都是对电流密度或速度起着阻碍其改变的作用。2、其中虚部的符号  $i$  表示交变电流比驱动电场晚  $\frac{\pi}{2}$  的相位，这正好符合谐振的特性。

结论：电导率的虚部反映了在交变电场驱动下电子谐振的性质，宏观上可以理解为：它对应着驱动电场的能量与电流激发的磁场能量的相互转化。