1. 初步认识本问题：

参照课件得到 8.3.3—8.3.5 式的方法：

不考虑空间非局域，且频率确定时：$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\varpi t}$，带入 8.3.1 式可以得到 8.3.3 式，由傅里叶变换可以得到$\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})$

同样地，考虑空间非局域效应时，波矢确定为 k 时，$\vec{E}(\vec{r})$ 也可分解：$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{ikr}$，由 $\vec{D}(\vec{r})=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}')d\tau'$，经过傅里叶变换可知$\vec{D}(\vec{k})=\varepsilon(\vec{k})\vec{E}(\vec{k})$

实际上电磁场为$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\varpi t}$，但是我们计算时未考虑$\varepsilon(\vec{k})$的影响，认为$\varepsilon(\vec{k})$是个恒定值，即忽略了空间的非局域效应。

2. 对该问题的理解：

参照对于ω对于电导率的影响：当ω很小的时候，在迟逾时间近似下，在电场一个周期中电子能和其他粒子发生非常多次碰撞，金属中的电流宏观上看仍然是“自由电流”，所以这种情况下金属电导率近似于迟逾近似下的金属直流电导率，这时时间上不均匀的电场对金属电导率以及介电函数的影响可以忽略，体系可以看做是在缓变的直流电场下变化的。而当电场随时间剧烈变化时，即ω很大时，电子相当于被束缚在一个有限空间内，传导电流从某种意义上来讲变成束缚在金属中的电流。这时交变场对金属的影响不可忽略，金属此时可以看成一种介质。

类似考虑对于空间的情况。电场的变化速率大小影响了ε计算的准确性。

课件中在计算ε的时候用到了两次近似：

第一次是在求电导率的过程中，利用了长波近似，将$\vec{E}(\vec{r})$近似成了$\vec{E}_0$，并得到了速度的试解$\vec{v}(t)=\vec{v}_0 e^{-i\omega t}$，并利用这个试解带入了电流密度的定义式：$\vec{j}(\vec{r},t)=n_e e\vec{v}$。现在假设认为$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\varpi t}$，即关注空间的非局域性，则$\vec{v}(\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r})e^{-i\omega t}$。带入 8.3.8 式：有$\vec{v}(\vec{r},t)=\dfrac{-e\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}e^{-i\omega t}}{im(\omega+i/\tau)}$，这和考虑了空间非局域之后的电场一样多了一个$e^{i\vec{k}\vec{r}}$项。所以在将速度带入电流密度的定义式的时候 8.3.11 的形式仍然不变：$\vec{j}(\vec{r},t)=n_e e\vec{v}(\vec{r},t)=n_e e\dfrac{-e\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}e^{-i\omega t}}{im(\omega+i/\tau)}=\dfrac{-n_e e^2\vec{E}(\vec{r},t)}{im(\omega+i/\tau)}$。所以在这一步中假定空间局域进行计算没有带来影响。

第二次是在计算$\sigma(\omega)$和$\varepsilon(\omega)$的过程中都默认了公式$\vec{j}=\sigma(\omega)\vec{E}$成立，即电流密度与电场频率相关，而与空间位置无关。可以把上式写成：$\vec{j}(\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r})$，即$\vec{j}$与$\vec{E}$是点对点的关系——某点的$\vec{j}$仅由同一点的$\vec{E}$决定，且某点的$\vec{E}$对$\vec{j}$的影响范围仅仅局限在同一点上。但是，当金属中电子运动的平均自由程较长的时候，以上公式就不成立了。因为这种情况下，从某一点附近来到该点的电子在此之前最后一次碰撞处与该点的距离会相对比较大。这样，电子运动路径上各点的电场差别较大，不能看做均匀的，所以这些电子沿

途经历的加速电场不同，进而到达该点时获得的加速度增量也不同。因此，$\vec{r}$ 点的电流密度收到周围各处电场的影响。而且 $\vec{r}$ 点的电场强度也会影响到其他点的电流密度。这个影响范围大约为电子运动的平均自由程的大小。这时体系中就存在明显的空间非局域效应，需要考虑其影响。

？？？（查阅一些资料：一般只有在纯度很高的金属、极低温度下才需要考虑非局域效应。因为电子在纯的金属原子之间运动时是不受阻尼的，阻尼来自电子与杂质碰撞。另外温度越高运动越剧烈，碰撞越频繁。

但是又查阅资料得知：只有当电场 $\vec{E}$ 在电子的平均自由程 L 大小的尺度上是均匀的、缓变的条件下，公式 $\vec{j}(\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r})$ 才成立。也就是说，电场 $\vec{E}$ 变化的周期应该大于电子运动的迟逾时间 τ 才可以做这样的近似。利用公式 $\sigma_c=\dfrac{n_e e^2}{m}\tau$ 计算金属的迟逾时间：以银为例，$n_e=5.88\times10^{28}/m^3$，$\sigma_c$ =6.17×10^7 /(m?Ω ，电子质量 $m=9.11\times10^{-31}kg$，电子电量 $e=1.60\times10^{-19}C$。算得 τ 的量级为 $10^{-14}s$。周期量级为 $10^{-14}s$ 的电磁波对应的波长为 $1\mu m$ 量级，对应频率为 $10^{14}Hz$。光波对应频率 $10^{15}Hz$。故对与频率小于 $10^{14}Hz$ 的电磁波来说，$\vec{j}(\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r})$ 的近似都是合理的。而对于频率更高的电磁波来说，这样做就不对了。所以用这种做法得到的介电函数也不准确。）

3．尝试修正

1）假设金属中电子的平均自由程为 L。设 P(r)为电子经过上一次碰撞之后运动了 r 路程**还不**被碰撞的几率。则 -P’(r)dr 为例子在 r 处长度为 dr 的路程中被碰撞的概率。由于平均自由程为 L，所以有方程：

$$\int_0^{\infty} r[-p'(r)]dr=L \text{——（1）}$$

又由归一化条件： $$\int_0^{+\infty}[-p'(r)dr]=1 \text{——（2）}$$

由（2）式有： $$p(r)|_0^{+\infty}=-1 \text{——（3）}$$

由（1）式： $$rp(r)|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}p(r)dr=-L \text{——（4）}$$

由（3）式推测试解为： $p(r)=e^{-ar}$——（5）　其中 a 为正数。

将试解（5）式代入（4）式，得到：$(0-0)-(-1/a)(0-1)=-L$

解得：$a=1/L$。 所以 $p(r)=e^{-r/L}$

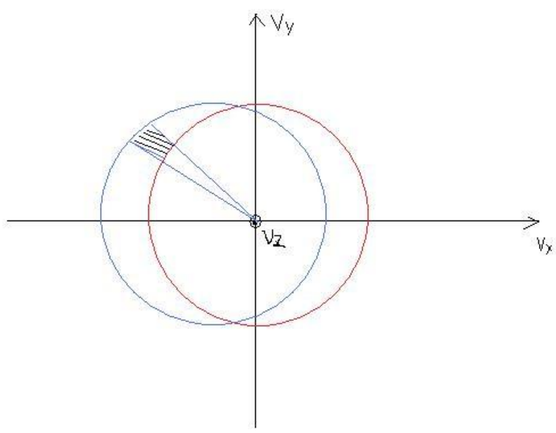
2）在没有外电场的情况下，由于任意时刻到达某一点的电子具有不同的大小和方向，随机分布。由于体系各向同性，所以速度的平均为 0。因此在没有电场作用下，金属中任何一点任意时刻电荷不发生宏观位移。同时，每次散射之后都使电速度发生任意的不规则变化，因此在构建模型的时候可以认为电子在每次受到异种粒子碰撞之后平均速度为 0。

金属导体中的自由电子可以在金属晶格间自由地做无规则的热运动，可以看做是电子气。根据气体的分子运动论，电子热运动的平均速率是 $\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8k_BT}{\pi m}}$，其中 $k_B=1.38\times10^{-23}J/K$ 是波尔兹曼常数。估算一下常温下电子的热运动速度，量级为 $10^5m/s$。而金属中电子的迟逾时间 τ 的量级一般为 $10^{-14}s$，电子在迟逾时

间内获得的由电场提供的加速度是：$\Delta v=\dfrac{eE}{m}\tau$，要使电场给电子的速度变化达到$10^{5}m/s$量级，电场强度需要达到$10^{7}V/m$量级。这远远超出了一般情况下金属导体中存在的电场大小。因此，我们可以认为电场的加入对电子热运动的平均速率$\bar{v}$的影响非常小，可以忽略。即加入电场后金属电子的平均运动速率仍然为$\bar{v}$。

现在考虑一个经历了最后一次碰撞之后从$\vec{r}$处来到原点的一个电子。在没有电场的情况下，粒子运动的速度方向就是沿着$\vec{r}$方向的，从$\vec{r}$运动到原点时间为$\Delta t=r/\bar{v}$。在加了电场的情况下，仍然可以假设电子是经过Δt时间到达原点的，因为电场对速率的影响非常小。假设电子到达原点的时刻为 t 时刻。这段时间内，电子受到电场的加速而获得的速度增量是：$d\vec{v}=\dfrac{e}{m}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})dt=\dfrac{e}{m}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})\dfrac{d\vec{r}\cdot\hat{r}}{\bar{v}}$。

现在计算电场所造成的电子的速度分布的变化。以电子的三个速度分量v_x、v_y、v_z为所标轴建立一个速度空间坐标系。如图，Z 方向垂直纸面向外。一个速度有一定大小和方向的电子，可用速度空间中的一个点代表。不存在电场时粒子的速度分布是关于原点球对称的（例如红线画出的示意图。红线所在球面上的点速度大小为$\vec{v}$）。而加了电场后电子在速度空间中的分布将偏离球对称，从而产生电流。（下图中假设电场方向沿着 x 轴正方向）。



由于电场造成速度变化非常小，所以图中实际上两个球体偏离的也非常小。考虑图中阴影部分的一小块体积。这块体积所夹立体角为$d\Omega$。则由于实际上红蓝二球偏离很小，所以可以认为阴影部分体积为：

$\bar{v}^{2}d\Omega(d\vec{v}?\hat{r}$ 。则假设金属中单位体积内电子数量为 n，则阴影部分体积内的电子数为：

$$dn=\frac{n}{\frac{4}{3}\pi\bar{v}^{3}}[\bar{v}^{2}d\Omega(d\vec{v}?\hat{r}\quad=\frac{n}{\frac{4}{3}\pi\bar{v}^{3}}\bar{v}^{2}\hat{r}d\vec{v}d\Omega$$

将$d\vec{v}$表达式带入上式：$dn=\dfrac{3ne}{4\pi\bar{v}^{2}m}\hat{r}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})(\hat{r}d\vec{r})d\Omega$

又因为并不是所有从$\vec{r}$处碰撞后的粒子都能无碰撞地到达原点的，不被碰撞的概率是 p(r).所以应该加上概率的修正：$dn=\dfrac{3ne}{4\pi\bar{v}^{2}m}\hat{r}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})p(r)(\hat{r}d\vec{r})d\Omega=\dfrac{3ne}{4\pi\bar{v}^{2}m}\hat{r}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})e^{-r/L}(\hat{r}d\vec{r})d\Omega$

因此速度畸变所造成的电流密度为：$dj=e\bar{v}dn=\dfrac{3ne^{2}}{4\pi\bar{v}m}\hat{r}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})e^{-r/L}(\hat{r}d\vec{r})d\Omega$

由于 dj 是$\vec{r}$方向上的，所以$d\vec{j}=e\bar{v}dn=\dfrac{3ne^{2}}{4\pi\bar{v}m}\hat{r}[\hat{r}\vec{E}(\vec{r},t-\dfrac{r}{\bar{v}})e^{-r/L}](\hat{r}d\vec{r})d\Omega$

令 $dV=r^2drd\Omega$，则 $d\vec{j}=\frac{3ne^2}{4\pi\bar{v}m}\frac{\hat{r}}{r^2}[\hat{r}?\vec{E}\ \ \vec{r}\ \ t-\frac{r}{\bar{v}}\ \ e^{-r/L}\ \ dV$ （其中 dr 为 $d\vec{r}$ 在 $\vec{r}$ 方向的投影）

令 $\sigma_c=\frac{ne^2}{m\tau}=\frac{ne^2L}{m\bar{v}}$，则积分后，

$$j=\frac{3\sigma_c}{4\pi L}\int\frac{\hat{r}}{r^2}[\hat{r}?\vec{E}\ \ \vec{r}\ \ t-\frac{r}{\bar{v}}\ \ e^{-r/L}\ \ dV\ =\frac{3\sigma_c}{L}\int\frac{\hat{r}}{r^2}\ \hat{r}\ \vec{E}\ \ \vec{r}\ \ t-\frac{r}{\bar{v}}\ \ e^{-r/L}\ \ r^2dr$$

$$=\frac{3\sigma_c}{L}\int\frac{\hat{r}}{r^2}(\hat{r}?\vec{E}_0\ \ e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t+i\omega\frac{r}{\bar{v}}}\ \ e^{-r/L}\ \ r^2dr=\frac{3\sigma_c}{L}e^{-i\omega t}\int\hat{r}E_0\qquad<\vec{r}\ \ \vec{E}>e^{i\cos<\vec{k},\vec{r}>kr+i\omega\frac{r}{\bar{v}}}\ \ e^{-r/L}dr$$

$$=\frac{3\sigma_c}{L}e^{-i\omega t}\int\hat{r}E_0\cos<\vec{r},\vec{E}>e^{i\cos<\vec{k},\vec{r}>kr+i\omega\frac{r}{\bar{v}}-r/L}dr=\frac{3\sigma_c}{L}e^{-i\omega t}\int\hat{r}E_0\cos<\vec{r},\vec{E}>e^{r(i\cos<\vec{k},\vec{r}>k+\frac{i\omega}{\bar{v}}-\frac{1}{L})}dr$$

$$=\frac{3\sigma_c}{L}\frac{e^{-i\omega t}E_0\cos<\vec{r},\vec{E}_0>\hat{r}}{i\cos<\vec{k},\vec{r}>k+\frac{i\omega}{\bar{v}}-\frac{1}{L}}\int de^{r(i\cos<\vec{k},\vec{r}>k+\frac{i\omega}{\bar{v}}-\frac{1}{L})}=\frac{3\sigma_c}{L}\frac{e^{-i\omega t}E_0\cos<\vec{r},\vec{E}_0>\hat{r}}{-i\cos<\vec{k},\vec{r}>k-\frac{i\omega}{\bar{v}}+\frac{1}{L}}$$

以上算出的是对于电子从一个方向上的 $\vec{r}$ 运动至原点时造成的电流密度。要算各个方向对原点处电流密度的影响，应该将以上公式对 $\vec{r}$ 取空间不同方向后求平均。

以上算的是考虑 $\vec{r}$ 处电场对原点的影响。如果推广一下，则在 $\vec{r}\,'$ 点的情况应该为：

$$j=\frac{3\sigma_c}{4\pi L}\int\frac{\hat{R}}{R^2}[\hat{R}?\vec{E}\ \ \vec{r}\ \ t-\frac{R}{\bar{v}}\ \ e^{-R/L}\ \ dV$$ ，其中 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$

？？？疑问：

对比课件上求得的关系：
$$\vec{j}(\vec{r},t)=n_ee\vec{v}(\vec{r},t)=n_ee\frac{-e\vec{E}_0e^{i\vec{k}\vec{r}}e^{-i\omega t}}{im(\omega+i/\tau)}=\frac{-n_ee^2\vec{E}(\vec{r},t)}{im(\omega+i/\tau)}=\frac{n_ee^2(\frac{m}{\tau}+im\omega)}{(\frac{m}{\tau})^2+m^2\omega^2}$$