

电动力学 Note——关于谐振腔的分析及讨论

王娟 08300190082 林逸华 08300190007 (按姓名笔画排序)

2010年12月21日

一、推导 TM_{mnp} 模式的波场:

根据波导中 TM 波的传递公式, 将 E_x, E_y, E_z, B_x, B_y 均分别拆分成两个对称平面波的线性叠加:

$$E_{0x} = i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} - i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} E_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \quad (1)$$

$$E_{0y} = i \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} - i \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} E_0' \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \quad (2)$$

$$E_{0z} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} + E_0' \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \quad (3)$$

$$B_{0x} = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_0}{ck_c^2} \left[E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} + E_0' \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \right] \quad (4)$$

$$B_{0y} = i \frac{m\pi}{a} \frac{k_0}{ck_c^2} \left[E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} + E_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \right] \quad (5)$$

根据: $E_{0x}|_{z=0} = 0$,
 $E_{0x}|_{z=d} = 0$,

$$(1) \text{ 当 } z=0 \text{ 时: } i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (E_0 e^{ik_g z} - E_0' e^{-ik_g z}) = 0$$

$$\therefore E_0 = E_0' \quad (6)$$

$$(2) \text{ 当 } z=d \text{ 时: } i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) E_0 (e^{ik_g d} - e^{-ik_g d}) = 0$$

$$\therefore k_g d = p\pi \Rightarrow k_g = \frac{p\pi}{d}, (p = 0, 1, 2, 3 \dots \dots) \quad (7)$$

把 (6) (7) 代入 (1) —— (5) 得:

$$E_x = -2 \frac{k_g}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

$$E_y = -2 \frac{k_g}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{-i\omega t} \quad (9)$$

$$E_z = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{-i\omega t} \quad (10)$$

$$B_x = -2i \frac{k_0}{ck_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{-i\omega t} \quad (11)$$

$$B_y = -2i \frac{k_0}{ck_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{-i\omega t} \quad (12)$$

$$B_z = 0 \quad (13)$$

谐振频率：

$$\omega = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (12)$$

$$\lambda = 2 / \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (13)$$

当立方体谐振腔时， $a = b = d$ ，原式可改写成：

$$\omega = \frac{c\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (14)$$

$$\lambda = 2a / \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (15)$$

二、简并度讨论：

设 $m^2 + n^2 + p^2 = X$

同样一个立方体谐振腔中每一个共振模式简并度可能有三种形式：

1. $m^2 = n^2 = p^2 = \frac{X}{3}$ ，此时 m, n, p 互易，简并度为 1；
2. $m^2 = n^2 = A, p^2 = B$ ($2A + B = X, A \neq B$)，此时仅 m, n 互易，简并度为 3；
3. $m^2 = A, n^2 = B, p^2 = C$ ($A \neq B \neq C, A + B + C = X$)，此时 m, n, p 两两不互易，简并度为 6。

三、证明 m, n, p 中仅一个为 0：

(反证法)

由 (6) — (11) 式可知：

1. 若 $m=0$ ，则 $E_x=E_y=E_z=B_x=B_y=B_z=0$ ，空间中不存在电磁场，因此假设不成立，故 $m \neq 0$
2. 若 $n=0$ ，则 $E_x=E_y=E_z=B_x=B_y=B_z=0$ ，空间中不存在电磁场，因此假设不成立，故 $n \neq 0$

$$3. \text{ 若 } p=0, \text{ 则 } E_z = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\omega t} \quad (16)$$

$$B_x = -2i \frac{k_0}{ck_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\omega t} \quad (17)$$

$$B_y = -2i \frac{k_0}{ck_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\omega t} \quad (18)$$

此即为立方体谐振腔基模 (1,1,0) 振荡模式。

因此，对于 TM 模式，m、n 都不能为 0，只有 p 可以为零。综合 TE 波在谐振腔中的振荡模式，m、n、p 中仅有一个为 0。

图像分析：

本模式中谐振腔边长取 0.3m，基频模式下 $\lambda = \sqrt{2}a$ ，根据计算

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2} \times 0.3} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times 10^9 \text{ Hz} \text{ 得所取源频率应当为 } \sqrt{\frac{1}{2}} \times 10^9 \text{ Hz}，\text{ 方可得到预想中的基频图像。}$$

频图像。

证明能流：

根据以上参数，利用 COMSOL 软件进行基频模式的激发，最后得到的结果如图：

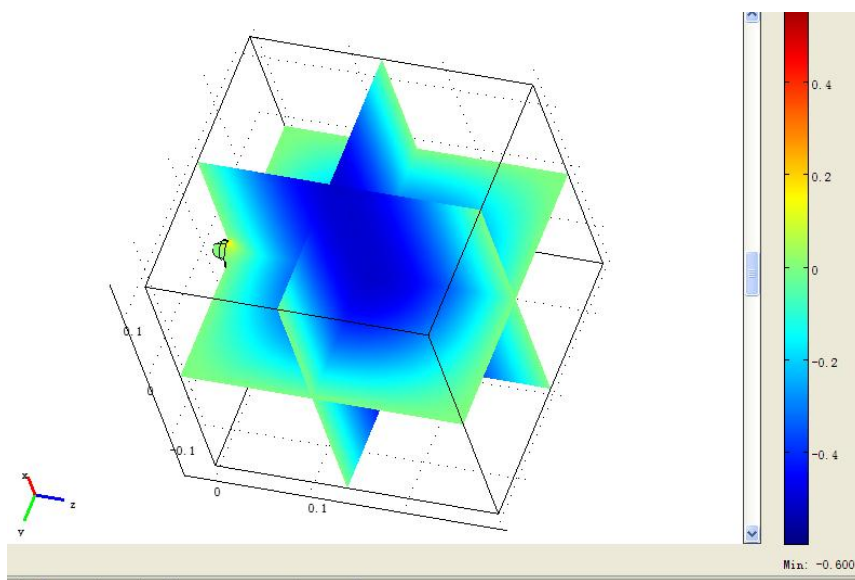


图 1 TE 波基频下 E_x 的分布图

分别在 $x=0, y=0, z=0$ 三个面上进行截面：

$z=0$ ：沿 x 轴方向无变化，沿 y 轴方向为相位为 $0 \sim \pi$ 的余弦波，则得到 $a=0, b=1$ 。

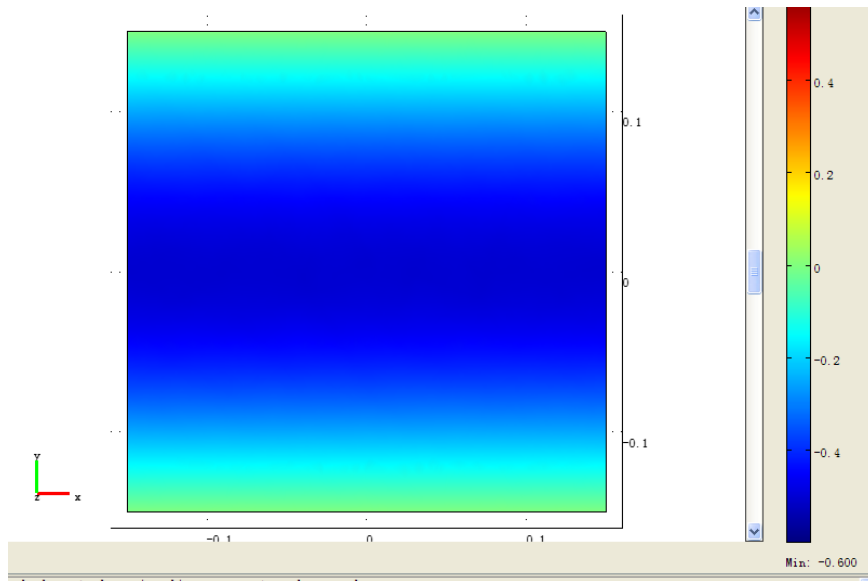


图2 $z = 0$ 面上的截图

$x = 0$: 沿 y,z 轴方向为相位为 $0 \sim \pi$ 的余弦波，圆环为两个余弦波的叠加而成，则得到 $b = c = 1$ 。

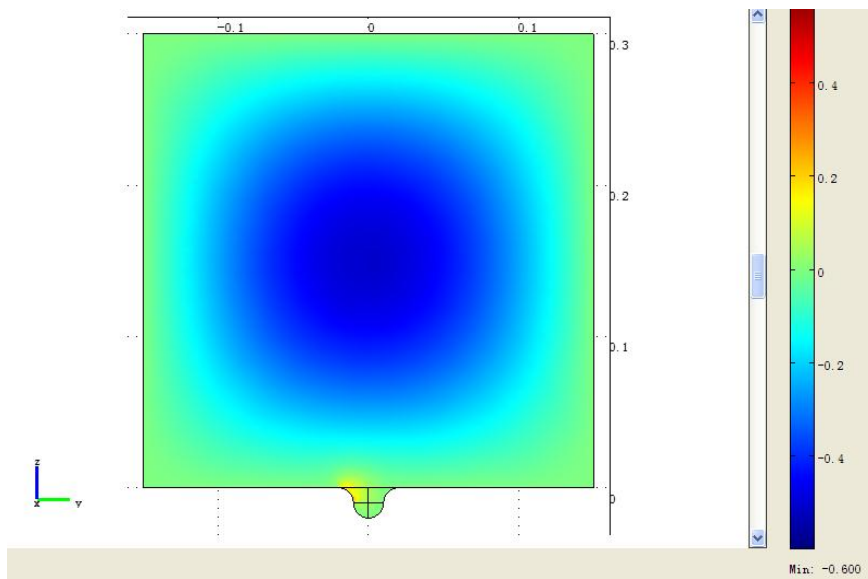


图3 $x = 0$ 面上的截图

$y = 0$: 沿 x 轴方向无变化，沿 z 轴方向为相位为 $0 \sim \pi$ 的余弦波，则得到 $a = 0$, $c = 1$ 。

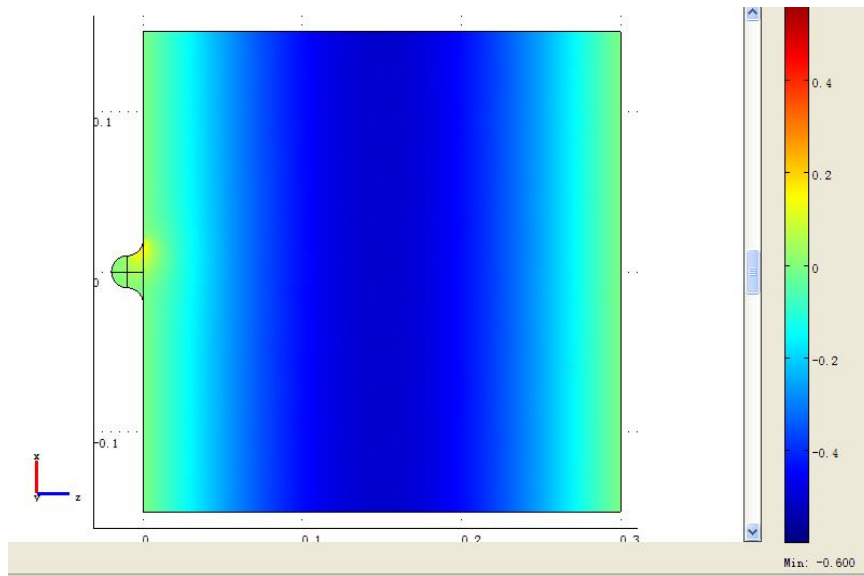


图4 $y = 0$ 面上的截图

综上， $a = 0, b = 1, c = 1$, 所得到的模式为(0,1,1)的基频模式，与预想的结果一致。

接下来给出 TE 波基频下 B_x 的分布图，分析结果与上面一致：

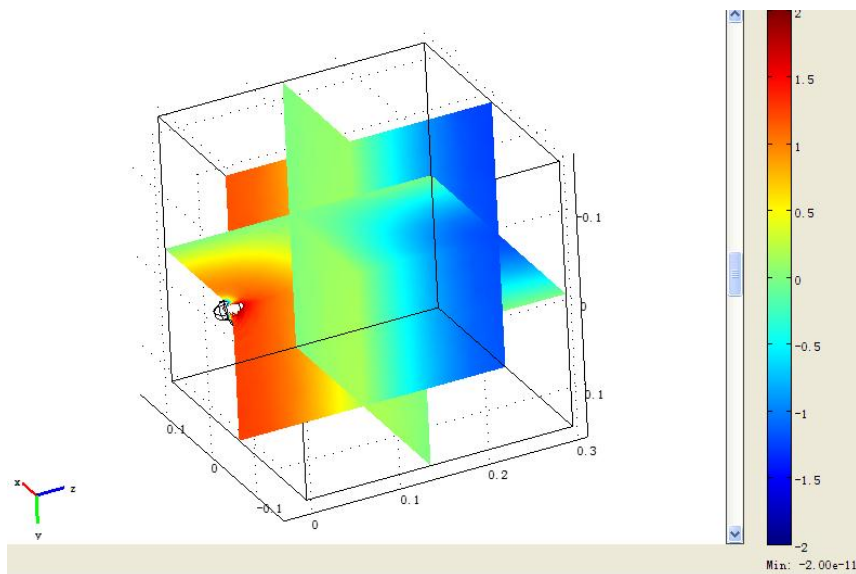


图5 TE 波基频下 B_x 的分布图

这里由于 B_x (0,1,1)基频下 z 分量是相位为 $0 \sim \pi$ 的 \cos 项，因此 $y=0$ 截面如下（由于波源干扰，图像看上去略显不对称）：

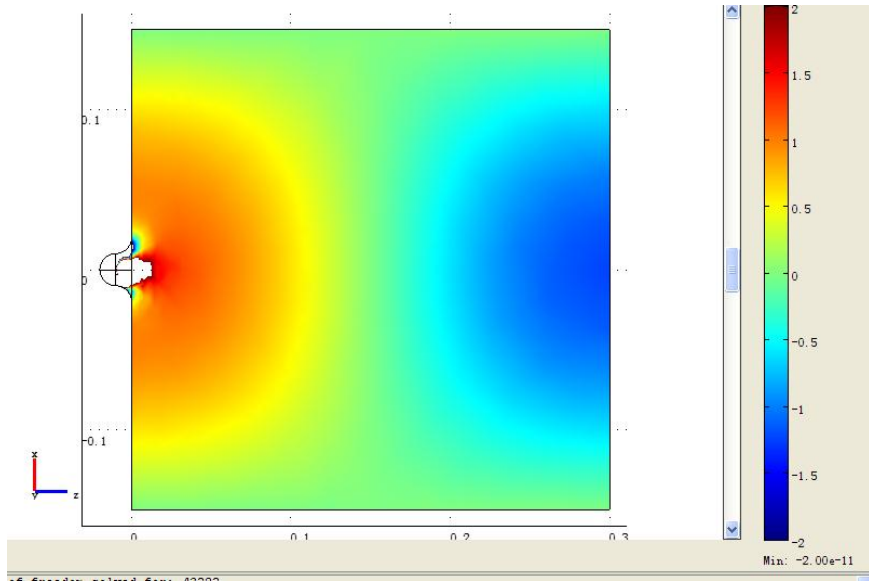


图 6 $y = 0$ 面上的截图

TM 波基频分析结果类似于 TE，详细分析同上，这里仅给个截图：

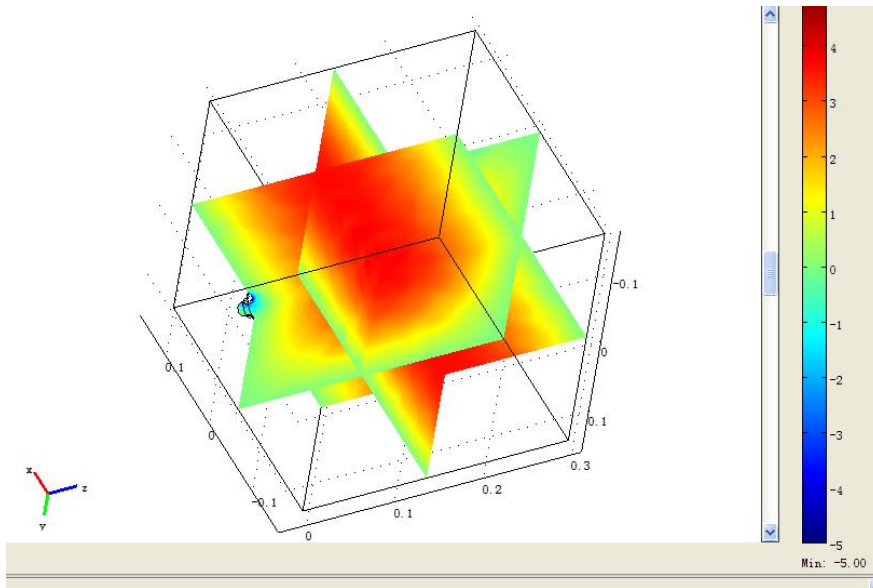


图 7 TM 波基频下 E_x 的分布图

接下来给出 TE 波基频下能流分布图，可以看到呈现出一个清晰的“轮状”：

TE(0,1,1)模式，谐振腔中电场和磁场的空间分布为：

$$B_y = -2i \frac{k_g \pi}{k_c^2 a} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-i\omega t} \quad (19)$$

$$B_z = 2i B_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-i\omega t} \quad (20)$$

$$\vec{E}_x = 2 \frac{ck_0}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-i\omega t} \quad (21)$$

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{Re}(\vec{E}_x) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}(B_y) & \text{Re}(B_z) \end{vmatrix} = -\text{Re}(\vec{E}_x) \text{Re}(B_z) \vec{j} + \text{Re}(\vec{E}_x) \text{Re}(B_y) \vec{k}$$

$$\vec{S}_p = \frac{1}{2} B_0^2 \frac{\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} \sin\left(\frac{2\pi z}{a}\right) \sin(2\omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \frac{k_s}{k_c^2} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \end{pmatrix}$$

(22) (23)

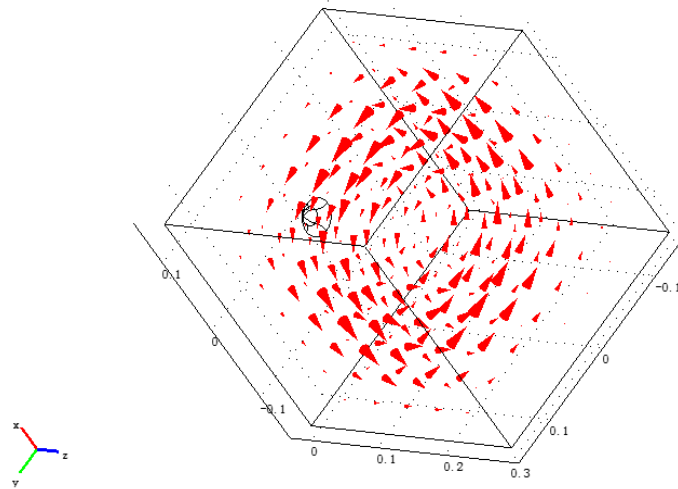


图 8 TE 波基频下能流分布图

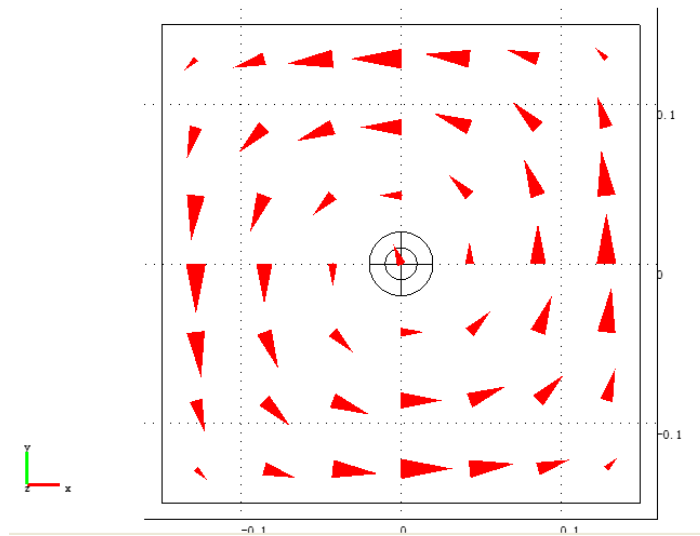


图 9 yz 坐标下 TE 波基频能流分布图

当然，如果需要，其他模式下的波的图像也可以给出，例如激发(2,1,1)态：根据计算

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\frac{2}{3}} \times 0.3} = \sqrt{1.5} \times 10^9 \text{ Hz} \text{ 得所取源频率应当为 } \sqrt{1.5} \times 10^9 \text{ Hz} \text{，方可得到预想中的}$$

基频图像。

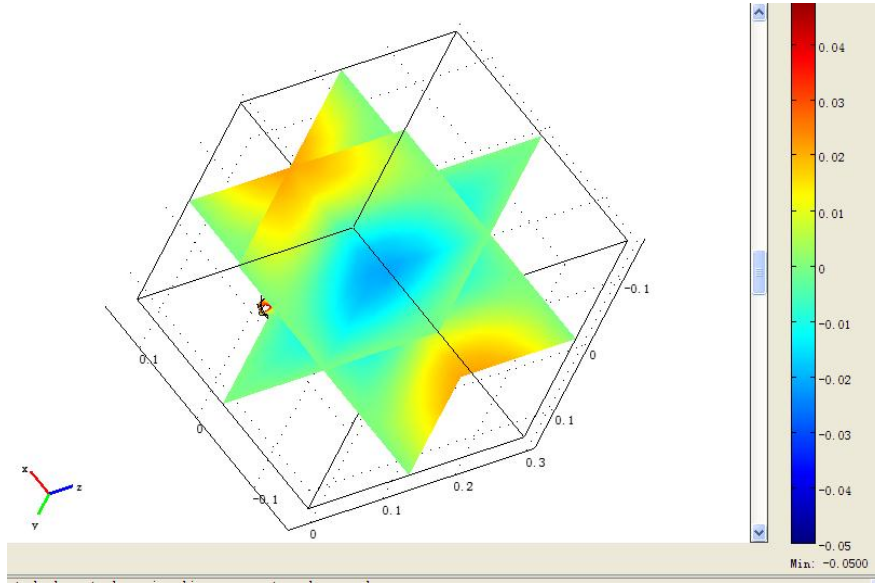


图 10 TE 波高激发态下 E_x 的分布图

沿 $z = 0$ 的截图便很好的显现出高阶激发态下波形的特性，此图易得知， $a = 2, b = 1$ 。

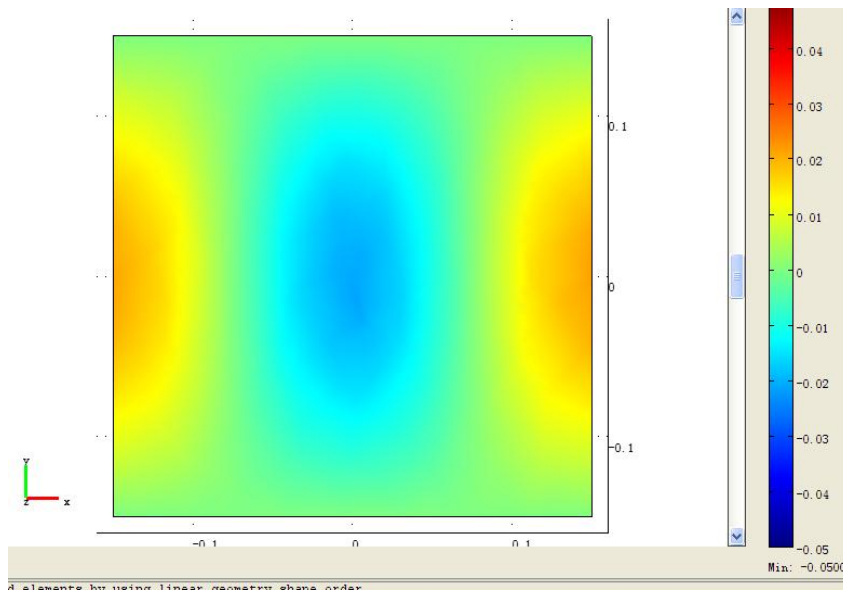


图 10 xy 面下 TE 波高激发态 E_x 的分布图

该条件下的能流分布呈现“两个轮”：

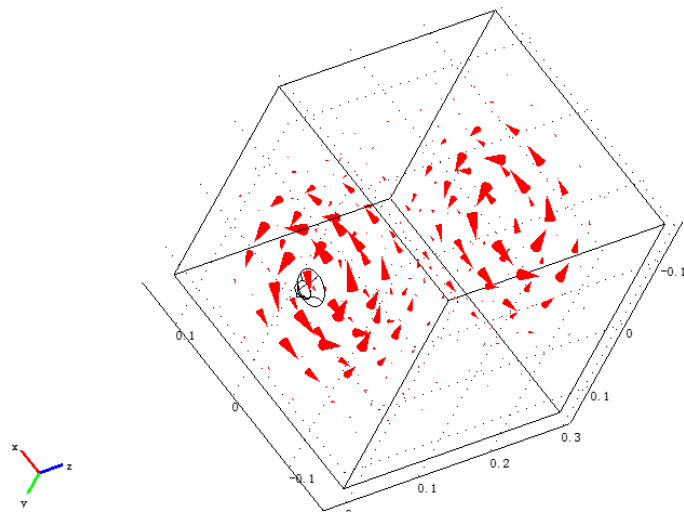
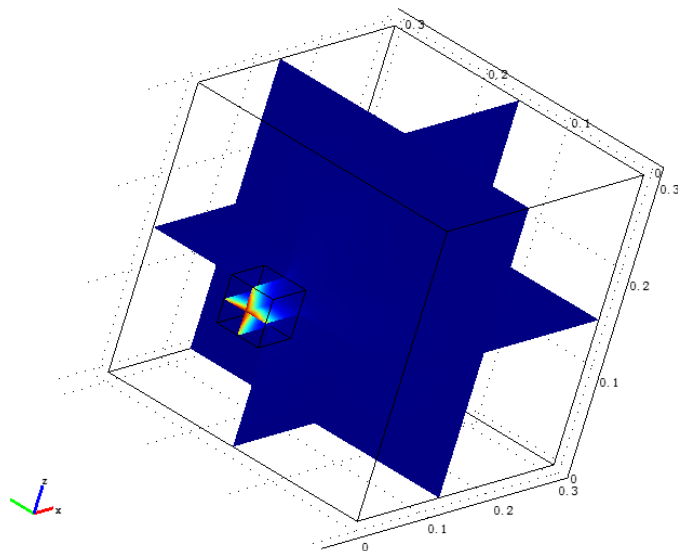


图 10 TE 波高激发态下能流分布图

回答操作过程中的问题及可能的物理原因：

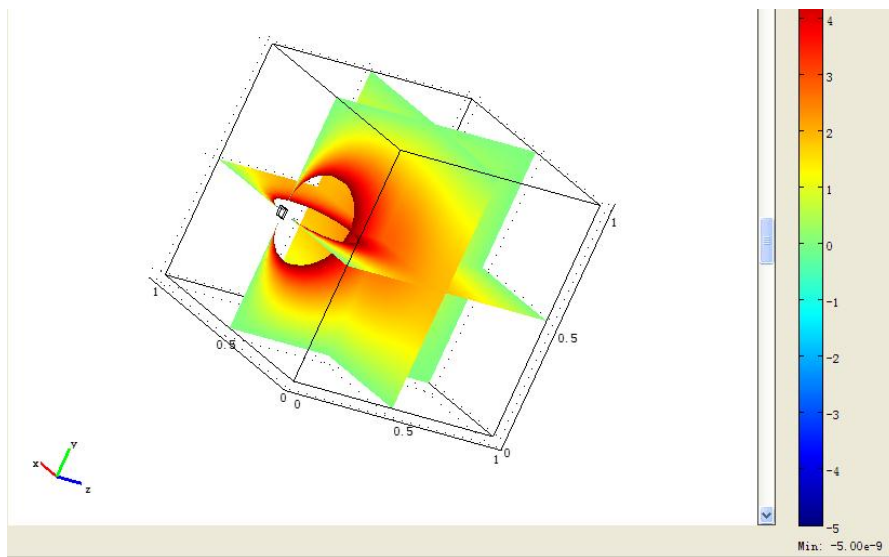
1. 上一个星期问过老师“为什么谐振腔中打入一个波，显示的结果是谐振腔中一点波都没有”这样一个问题：

原因：在整个模型构造中，电磁场均是由一个小管子导入谐振腔中，那么电磁场强度的分布结果肯定是管中比较积聚，发散到谐振腔中就比较稀疏。由于管口径较小，管内的能量会比谐振腔内的高出 3 个量级左右，因此若是将管内和谐振腔内两者的电磁波强度全显示在一个图中，谐振腔内部相对微小的强度波动比起管内的电磁场强度可忽略不计，因此近似为 0。

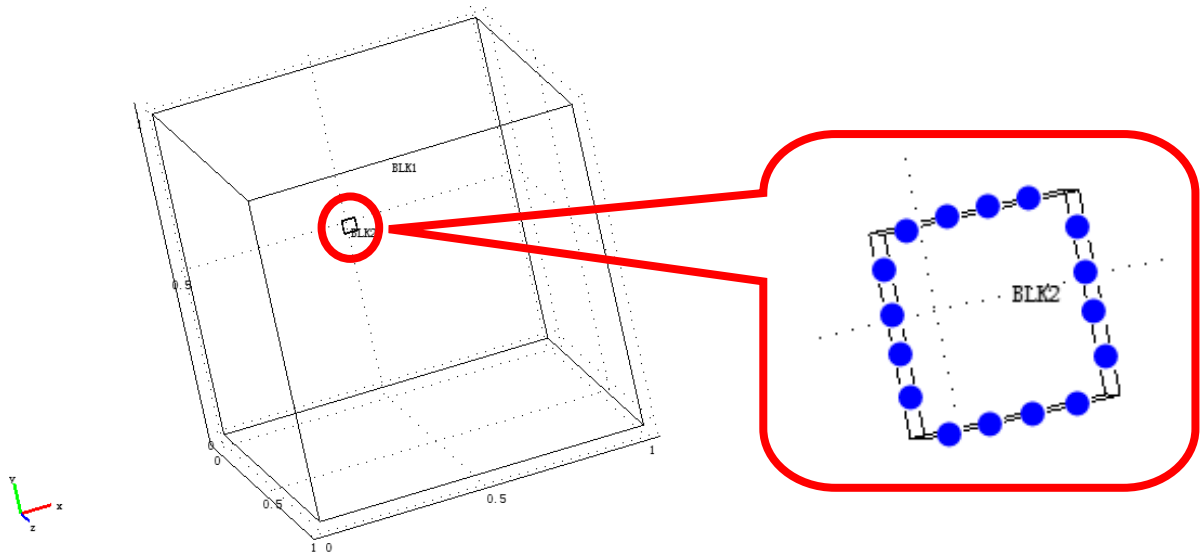


解决方法：将显示模式的电场强度范围调小，即为显示更为精确，这样场强较大的波源即不显示（图中显示为无色），谐振腔内的场强情况即可清晰可见。（这个并不物理，只是为了回答一下上次我自己的疑问，因为发现最后不是能量打不进去，而是我忽略考虑了能量差的问题 T_T）

2. 但即使如此，发现图像还是存在很大问题，有下图可见，电磁场传播过程中中间出现了很大的一个“洞”，这个洞是场强较强，已超出量程范围的部分。该情况会给最后的图像带来严重干扰。

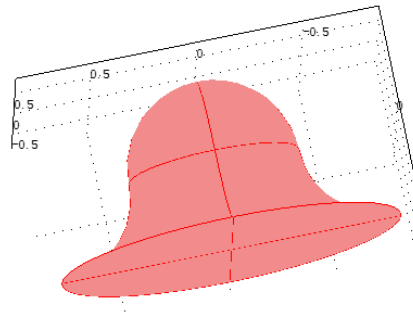


原因：如果把管道（此处为方形）与谐振腔的连接点进行分析，我们可以发现接口处可以等效为几条同相位的次波源：

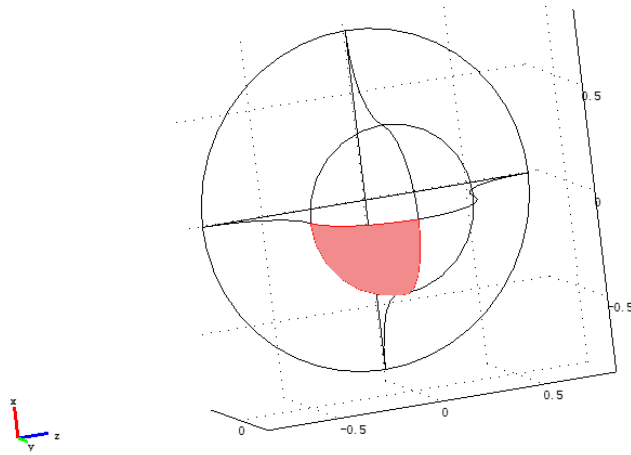


既然是同相位，因此在这些次波源便会形成对远场的叠加干涉，因此会形成一个较大的干扰场强来影响整个场强的分布。

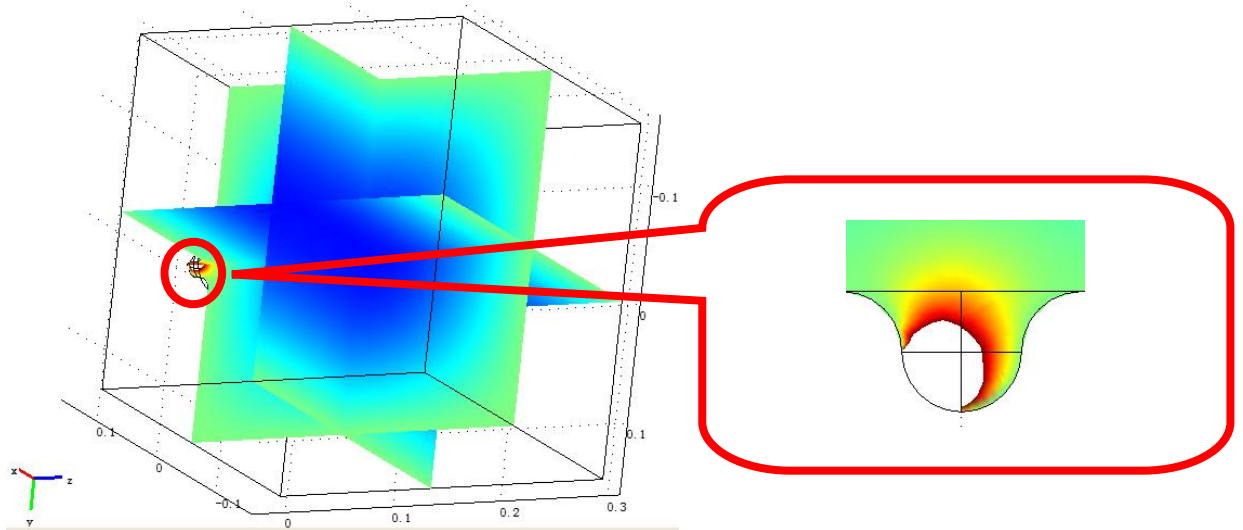
解决方案：我们将入射管的形状改成了如下图案，目的是为了让该管与谐振腔的结合处实现“没有棱角”，也就难以产生次波源；



同时，入射场也改为非对称入射（图中仅红色部分设为入射场，其余部分为 PEC），便可进一步减小场源干涉对谐振腔结果造成的干扰。



最后达到了非常好的结果 (^_^)



总结：这次整个做的过程中的物理并不是很复杂，但是整个过程中一方面是利用软件给我们对物理图象一个直观的展示，另一方面是在实际模型搭建的过程中体会到了物理思想实际运用中会面对的各种各样理论中很难想到的问题（尤其是本 note 中波源的问题），并如何同样利用物理知识将其解决掉。唯一美中不足的是花的时间似乎太多了……不管怎么说还是一次

非常好的体验与感悟吧~