高维微分学——曲面向量值映照

复旦力学　谢锡麟

2016 年 3 月 15 日

1　知识要素

1.1　曲面的切平面与法向量

定义 1.1 (曲面). 一般地, $m+1$ 维 Euclid 空间中的 m 维曲面可以由以下向量值映照给出

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma):\mathbb{R}^m\supset D_x\ni\boldsymbol{x}_\Sigma=\begin{pmatrix}x_\Sigma^1\\ \vdots\\ x_\Sigma^m\end{pmatrix}\mapsto\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\triangleq\begin{pmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\\ X^{m+1}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\in\mathbb{R}^{m+1},$$

如图1所示.

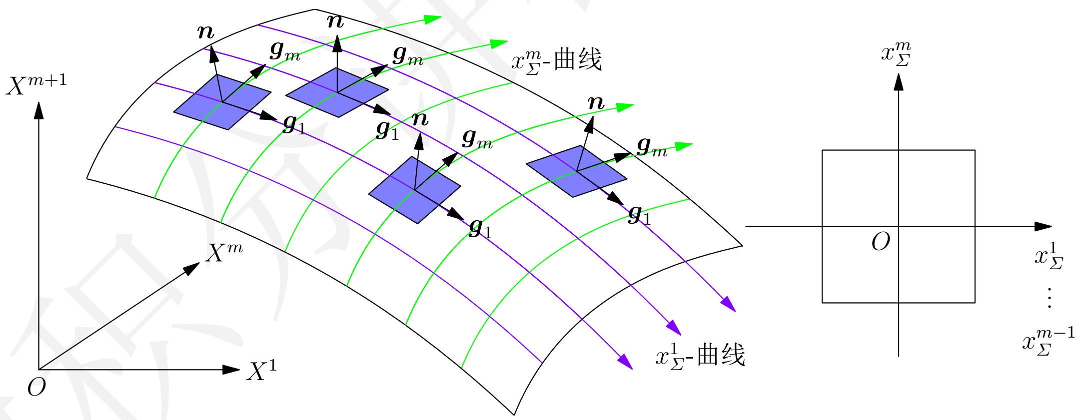

图 1: 有限维 Euclid 空间中曲面向量值映照示意

该曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Sigma^1}{\partial x_\Sigma^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Sigma^1}{\partial x_\Sigma^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^m}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+1)\times m},$$

令 $\boldsymbol{D\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)=\Big(\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_\Sigma)\quad\cdots\quad\boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}_\Sigma)\Big)$, 其中

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma)\triangleq\lim_{\lambda\to0\in\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma+\lambda\boldsymbol{i}_i)-\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)}{\lambda}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Sigma^1}{\partial x_\Sigma^i}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^i}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\in\mathbb{R}^{m+1}$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 在 $\boldsymbol{x}_\Sigma$ 点处沿坐标线 x_Σ^i 的**切向量**.

使得 $D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 为列满秩的点称为**正则点**.

定义 1.2 (切空间)**.** 在曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的正则点处, 切向量 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 张成的空间称为**切空间**, 记作 $T_{x_\Sigma}\Sigma$.

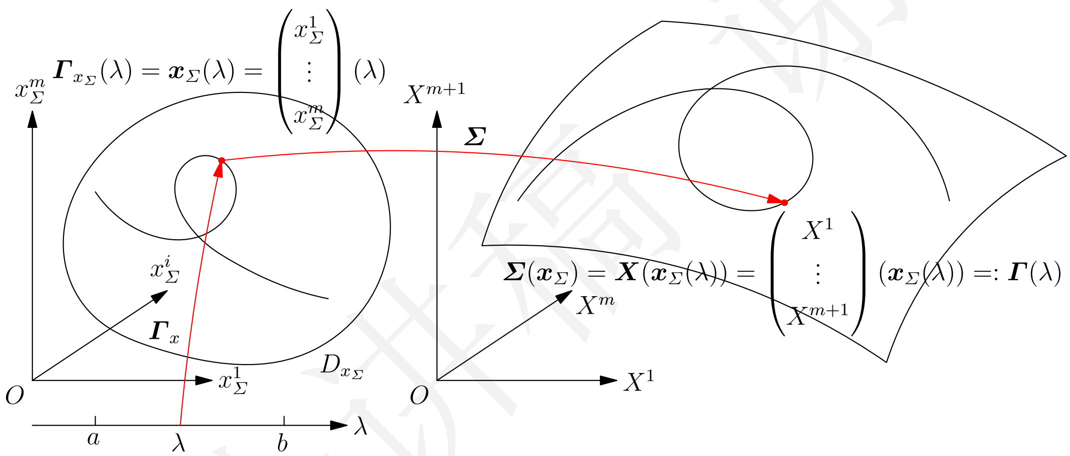

图 2: 曲面上曲线示意

曲面上的曲线在参数空间可以表示为如下映照 (如图2所示):

$$\boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma}:[\alpha,\beta]\ni\lambda\mapsto\boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma}(\lambda)\equiv\boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda)=\begin{pmatrix}x_\Sigma^1(\lambda)\\ \vdots\\ x_\Sigma^m(\lambda)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m,$$

而该曲线在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}(\lambda)\equiv\boldsymbol{X}(\lambda)=\boldsymbol{\Sigma}\circ\boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma}(\lambda)=\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda)),$$

其切向量可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}(\lambda)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)&\triangleq\lim_{\Delta t\to0\in\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{X}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{X}(\lambda)}{\Delta\lambda}\\&=D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\Sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=\dot{x}_\Sigma^i(\lambda)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda))\in T_{x_\Sigma}\Sigma,\end{aligned}$$

即曲面上曲线的切向量一定落在该曲面的切空间中.

性质 1.1 (正则点法向量的唯一存在性). 对曲面上的正则点，存在且唯一存在同正则点的正交的**法向量**.

证明 考虑到 $(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma))_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0,\ i = 1, \cdots, m$ 等价于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}_\Sigma)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = (\boldsymbol{D\Sigma})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m,$$

由于 $rank(\boldsymbol{D\Sigma})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = m$, 按齐次线性方程组理论, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{m+1}$ 的方向唯一确定. □

基于法向量, 正则点 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 处的切空间可有如下的集合表示

$$T_{x_\Sigma}\Sigma = \{\boldsymbol{X} \mid (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma))_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0\},$$

亦即有

$$\left(X^1 - \Sigma^1(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right) n^1(\boldsymbol{x}_\Sigma) + \cdots \left(X^{m+1} - \Sigma^{m+1}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right) n^{m+1}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = 0.$$

1.2 曲面的基本形式

定义 1.3 (曲面第一基本形式). 由 $g_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = (\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_\Sigma))_{\mathbb{R}^{m+1}}$ 构成的 $m \times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \begin{pmatrix} g_{11}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & g_{1m}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & g_{mm}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \end{pmatrix} = D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma)D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的第一基本形式.

性质 1.2 (曲面第一基本形式的对称性与正定性). 曲面的第一基本形式矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称矩阵; 在曲面的正则点处, 曲面的第一基本形式矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵.

证明 由内积的对称性, 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的对称性是显然的.

下面证明正定性. 设 $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi} = (D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}(D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi}) \\ &= |D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi}|^2_{\mathbb{R}^m} = (\xi^i\boldsymbol{g}_i)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

在曲面的正则点处, 有 $\mathrm{rank}D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = m$, 即 $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma)\}_{i=1}^m$ 线性无关. 所以当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\xi} = (\xi^i\boldsymbol{g}_i)^2 = 0$ 时, 必然有 $\xi^i = 0, i = 1, \cdots, m$, 即 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$. 因此矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵. □

定义 1.4 (曲面的第二基本形式). 令

$$b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = -\left(\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_\Sigma), \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^i_\Sigma}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}},$$

并引入 $m\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\Sigma)=\begin{pmatrix} b_{11}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & b_{1m}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & b_{mm}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\end{pmatrix}=-D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\cdot D\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\in\mathbb{R}^{m\times m},$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的**第二基本形式**.

性质 1.3 (曲面的第二基本形式的对称性)**.** 曲面的第二基本形式矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵.

证明 考虑到

$$\begin{aligned} b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)&=\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x_\Sigma^i}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}=\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Sigma}}{\partial x_\Sigma^i\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}\\ &=\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}=b_{ji}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\end{aligned}$$

所以曲面第二基本形式 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵. □

1.3 曲面的 Gauss 曲率与平均曲率

首先引入线性代数中一个重要结论.

引理 1.4 (同时对角化)**.** 设有对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 则一定唯一存在一个非奇异的矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m,\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}.\end{cases}$$

式中, $\boldsymbol{I}_m$ 为 m 阶单位矩阵, λ_i 满足 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{A})=0,\quad i=1,\cdots,m.$

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 因此一定唯一存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_A$, 使得

$$\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A=\boldsymbol{\Lambda}_A=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix},$$

其中, $a_1,\cdots,a_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 所以它所有的特征值都是正的. 记

$$\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}a_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & a_m^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A=\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}}$, 即

$$(\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}=\boldsymbol{I}_m,$$

因此令 $\boldsymbol{S}_A=\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}$, 有 $\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A=\boldsymbol{I}_m$.

令 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A$, 因为 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, 所以 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 也是对称矩阵, 而且唯一存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_B$, 满足

$$\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{\varLambda}_{\widetilde{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

式中, $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的特征值, 满足 $\det(\widetilde{\boldsymbol{B}}-\lambda_i\boldsymbol{I}_m)=0,i=1,\cdots,m$. 也就是

$$\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}.$$

此处令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\varLambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}\boldsymbol{Q}_B$, 即有

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

而且

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{I}_m.$$

λ_i 满足

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{B}}-\lambda_i\boldsymbol{I}_m)=\det(\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A-\lambda_i\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A)=\det[\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}_A]=0,$$

即 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{A})=0$. □

定义 1.5 (曲面 Gauss 曲率及平均曲率)**.** 根据同时对角化定理, 曲面第一基本形式 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵, 曲面第二基本形式 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, 因此唯一存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m,\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}.\end{cases}$$

此处 λ_i 满足 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{G})=0,i=1,\cdots,m$. 由此, 可作

$$\begin{cases}K_G=\displaystyle\prod_{i=1}^m\lambda_i=\det(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B})=\frac{\det\boldsymbol{B}}{\det\boldsymbol{G}}\\ H=\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_i=\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B})\end{cases},$$

式中 K_G 称为 **Gauss 曲率**, H 称为**平均曲率**.

1.4 曲面的局部标架及其运动方程

所有的切向量和法向量 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m \cup \{\boldsymbol{n}\}$ 构成 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间中一个基, 可称为**曲面上局部协变基**. 按对偶关系, 一定唯一存在**曲面上局部逆变基**$\{\boldsymbol{g}^\alpha\}_{\alpha=1}^{m+1}$, 满足

$$\left(\boldsymbol{g}_\alpha, \boldsymbol{g}^\beta\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_\alpha^\beta \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \cdots & \boldsymbol{g}^{m+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_{m+1},$$

由此, 由 $(\boldsymbol{g}_{m+1}, \boldsymbol{g}^{m+1})_{\mathbb{R}^{m+1}} = 1$, $\boldsymbol{g}_{m+1} = \boldsymbol{n}$, 有 $\boldsymbol{g}^{m+1} = \boldsymbol{n}$. 由 $(\boldsymbol{g}_{m+1}, \boldsymbol{g}^i)_{\mathbb{R}^{m+1}} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}^i)_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0$, 可得 $\boldsymbol{g}^i$ 也是切空间 $T_x\Sigma$ 的元素, 满足 $(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_j^i$.

引入 $g_{ij} = (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j)_{\mathbb{R}^{m+1}}$, $g^{ij} = (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j)_{\mathbb{R}^{m+1}}$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i &= (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j)_{\mathbb{R}^{m+1}}\, \boldsymbol{g}^j + (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{n})_{\mathbb{R}^{m+1}}\, \boldsymbol{n} = g_{ij}\boldsymbol{g}^j, \\ \boldsymbol{g}^i &= (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j)_{\mathbb{R}^{m+1}}\, \boldsymbol{g}_j + (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{n})_{\mathbb{R}^{m+1}}\, \boldsymbol{n} = g^{ij}\boldsymbol{g}_j. \end{aligned}$$

亦即, 切空间中的两组基可按照上式关系进行相互转换.

以下研究协变基向量沿坐标线的变化率，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) &\triangleq \lim_{\lambda \to 0 \in \mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma + \lambda \boldsymbol{i}_j) - \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma)}{\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}^k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}_k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

此处引入曲面上的 Christoffel 符号, 定义为

$$\Gamma_{ij,k} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}, \quad \Gamma_{ij}^k = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}.$$

式中 $\{\Gamma_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^m$ 称为**曲面的第一类 Christoffel 符号**, $\{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^m$ 为**曲面的第二类 Christoffel 符号**.

因此对于切向量, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \Gamma_{ij,k}\boldsymbol{g}^k + b_{ij}\boldsymbol{n} = \Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k + b_{ij}\boldsymbol{n}.$$

同样地, 研究法向量沿坐标线的变化率, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) &\triangleq \lim_{\lambda \to 0 \in \mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma + \lambda \boldsymbol{i}_j) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)}{\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}^k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}_k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n}, \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\, \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{n},\, \boldsymbol{n})_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0;\\
\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} &= \frac{\partial}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{n},\, \boldsymbol{g}_k)_{\mathbb{R}^{m+1}} - \left(\boldsymbol{n},\, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = -b_{jk};\\
\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma),\, g^{kt}\boldsymbol{g}_t\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = -g^{kt}b_{jt} = -b_j^k.
\end{aligned}$$

因此对于法向量有

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = -b_{jk}\boldsymbol{g}^k = -b_j^k\boldsymbol{g}_k.$$

综上, 协变基标架的标架运动方程为

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k + b_{ij}\boldsymbol{n} = \Gamma_{ij,k}\boldsymbol{g}^k + b_{ij}\boldsymbol{n};\\
\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = -b_{jk}\boldsymbol{g}^k = -b_j^k\boldsymbol{g}_k.
\end{cases}$$

同理可得, 逆变基标架的标架运动方程为

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = -\Gamma_{jk}^i\boldsymbol{g}^k + b_j^i\boldsymbol{n};\\
\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = -b_{jk}\boldsymbol{g}^k = -b_j^k\boldsymbol{g}_k.
\end{cases}$$

1.5 曲面的法截线与主法截线

1.5.1 截线曲率

引理 1.5. 对于曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 上的任意参数曲线 $\boldsymbol{r}(t)$, 有如下关系成立:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle_{T_x\Sigma} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t), \boldsymbol{n}_\Sigma(t)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}},$$

式中定义了切空间中的内积

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_{T_x\Sigma} = b_{ij}\xi^i\eta^j,\ \forall\, \boldsymbol{\xi} = \xi^i\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\eta} = \eta^j\boldsymbol{g}_j \in \mathbb{R}^{m+1},$$

$\boldsymbol{n}_\Sigma(t)$ 为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 在该点处的法向量.

证明 因为曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 在曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 上, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(t)) \in T_x\Sigma;\\
\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) &= \ddot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(t)) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\\
&= \ddot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(t)) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)[\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_\Sigma(t)) + b_{ij}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma(t))].
\end{aligned}$$

由此将有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t), \boldsymbol{n}_\Sigma(t)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t) = \left\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle_{T_x\Sigma}.$$

□

根据 $m+1$ 维空间中曲线的 Frenet 标架, 截线的切向量可以表示为 $\boldsymbol{\tau}(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$, 现 s 为弧长参数. 法向量满足

$$\boldsymbol{\tau}'(s)=\boldsymbol{r}''(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s),$$

式中, $\kappa(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^{m+1}}$ 为曲线的曲率, $\boldsymbol{n}(s)=\dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|_{\mathbb{R}^{m+1}}}$ 为曲线的法向量.

注意到

$$\boldsymbol{r}'(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^{m+1}}}=\frac{\dot{x}^i(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^{m+1}}}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(t)),$$

所以

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}'(s)\rangle_{T_x\Sigma}&=\frac{b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^{m+1}}}=\frac{b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{g_{pq}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^p(t)\dot{x}^q(t)},\\ \big(\boldsymbol{r}''(s),\boldsymbol{n}_\Sigma\big)_{\mathbb{R}^{m+1}}&=\kappa(s)\left(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{n}_\Sigma\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}=\kappa(s)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_\Sigma),\end{aligned}$$

式中 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_\Sigma)$ 表示曲线法向量 $\boldsymbol{n}$ 与曲面法向量 $\boldsymbol{n}_\Sigma$ 之间的夹角. 根据引理1.5可得

$$\kappa(s(t))\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_\Sigma)=\frac{b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{g_{pq}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^p(t)\dot{x}^q(t)},$$

截线曲率即为

$$\kappa(s(t))=\frac{1}{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_\Sigma)}\frac{b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{g_{pq}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^p(t)\dot{x}^q(t)}.$$

1.5.2 法截线曲率

法截线是曲面与通过曲面某点法线的平面 (法截面) 相交截得的曲线. 在这种情况下, $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_\Sigma)=\pm1$, 因此法截线曲率可以表示为

$$\kappa(s(t))=\pm\frac{b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{g_{pq}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\dot{x}^p(t)\dot{x}^q(t)}.$$

上式右端的分子和分母都是二次型, 于是引入

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}^1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}^m(t)\end{pmatrix},$$

则法截线曲率可以表示为

$$\kappa(s(t))=\pm\frac{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\Sigma(t))\boldsymbol{\xi}(t)}{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_\Sigma(t))\boldsymbol{\xi}(t)}.$$

根据同时对角化定理, 一定存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m,\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_m\end{pmatrix}.\end{cases}$$

其中 λ_i 满足 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{G})=0, i=1,\cdots,m$. 所以有

$$\kappa(s(t))=\pm\frac{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}}.$$

如果令 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}(t)=\begin{pmatrix}\widetilde{\xi}^1(t)\\ \vdots\\ \widetilde{\xi}^m(t)\end{pmatrix}$, 则法截线曲率可以表示为简单的形式

$$\kappa(s(t))=\pm\frac{\lambda_i(\widetilde{\xi}^i(t))^2}{|\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t)|^2_{\mathbb{R}^2}}.$$

如果取 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (第i行), 则有 $\kappa(s(t))=\pm\lambda_i$. 此时 $\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{S}_i(t)$, 即为矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的第 i 列.

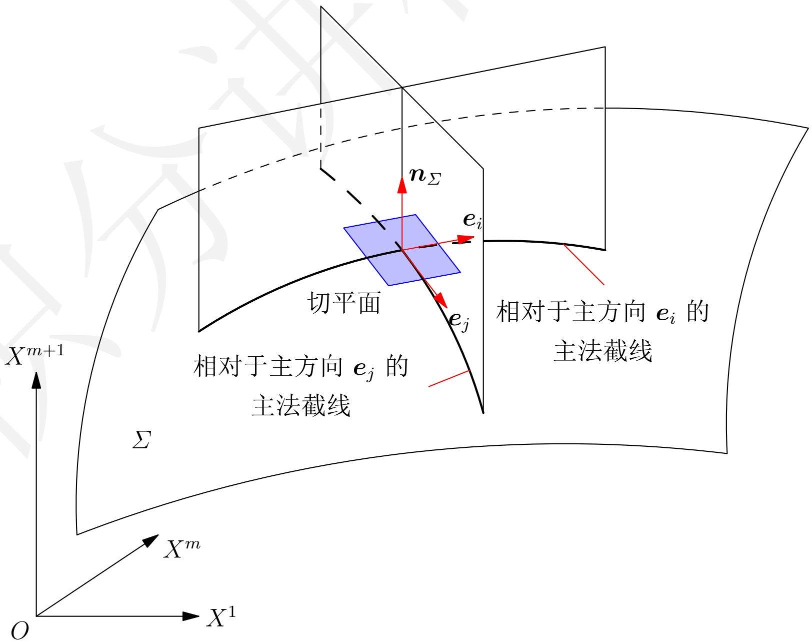

图 3: 主法截线示意

曲率为 $\kappa(s(t))=\pm\lambda_i$ 的法截线称为**主法截线**. 以 $\boldsymbol{S}$ 的各个列向量 $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=1}^m$ 分别作为切空间局部协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 的坐标，则确定了一个切空间的单位正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m$, 称为**主方向**. 具体可表述如下

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{S}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_m,$$

因此 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_m \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 即 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m$ 是切空间的一个单位正交基.

$\boldsymbol{n}_\Sigma$ 同主方向 $\boldsymbol{e}_i$ 确定的法截面截取曲面 Σ 的截线为一条主法截线, 其曲率为 $\pm\lambda_i$. 主方向及主法截线的关系, 如图3所示.

2 应用事例

2.1 二维 Monge 型曲面的 Gauss 曲率及平均曲率

设 $\mathbb{R}^3$ 中的二维 Monge 型曲面具有以下的向量值映照表示:

$$\boldsymbol{\Sigma}(x,y) : D_{xy} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

有

$$D\boldsymbol{\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 \\ Df(x,y) \end{pmatrix}.$$

所以有

$$\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix} = (D\boldsymbol{\Sigma})^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_2 + (Df)^{\mathrm{T}} Df = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix},$$

法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2|_{\mathbb{R}^3}} \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算曲面第二基本量, 即

$$b_{ij} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^i}, \boldsymbol{n} \right)_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}(x,y),$$

另可得

$$\begin{pmatrix} g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2} \begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix},$$

故可有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{kj} \end{pmatrix} &= \frac{1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} (1+f_y^2)f_{xx} - f_x f_y f_{xy} & (1+f_y^2)f_{xy} - f_x f_y f_{yy} \\ (1+f_x^2)f_{xy} - f_x f_y f_{xx} & (1+f_x^2)f_{yy} - f_x f_y f_{xy} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

综上, 可有

$$K_G = \frac{\det\left(b_{ij}\right)}{\det\left(g_{ij}\right)} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},$$
$$H = b_s^s = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} + (1+f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

对于柱面, 其向量值映照表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}(x,y) : D_{xy} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

此情形下, 有

$$f_y = 0, \quad f_{xy} = f_{yy} = 0,$$

因此可得柱面的曲率计算式为

$$K_G = 0,$$
$$H = \frac{f_{xx}}{(1+f_x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

对于平均曲率的计算, 也可根据如下关系式获得.

$$-b_s^s = \overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}^1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}^2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}),$$

式中 $\{x^i\}_{i=1}^2$ 为曲面 Σ 的一般参数. 现已有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \\ f_x & f_y & \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \end{pmatrix},$$

直接求其逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+f_y^2}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{-f_xf_y}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{f_x}{1+f_x^2+f_y^2} \\ \dfrac{-f_xf_y}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{1+f_x^2}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{f_y}{1+f_x^2+f_y^2} \\ \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} & \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \end{pmatrix},$$

则有

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix}
\dfrac{1+f_y^2}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{-f_xf_y}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \\
\dfrac{-f_xf_y}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{1+f_x^2}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \\
\dfrac{f_x}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{f_y}{1+f_x^2+f_y^2} & \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\boldsymbol{g}^1 = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\begin{pmatrix} 1+f_y^2 \\ -f_xf_y \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\begin{pmatrix} -f_xf_y \\ 1+f_x^2 \\ f_y \end{pmatrix}.
$$

由 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$ 可计算得

$$
\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)
\end{pmatrix} = \frac{-1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}
(1+f_y^2)f_{xx} - f_xf_yf_{xy} \\
(1+f_x^2)f_{xy} - f_xf_yf_{xx} \\
f_xf_{xx} + f_yf_{xy}
\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)
\end{pmatrix} = \frac{-1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}
(1+f_y^2)f_{xy} - f_xf_yf_{yy} \\
(1+f_x^2)f_{yy} - f_xf_yf_{xy} \\
f_xf_{xy} + f_yf_{yy}
\end{pmatrix},
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}(x,y) &= -\frac{(1+f_y^2)f_{xx} - f_xf_yf_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -b_1^1, \\
\boldsymbol{g}^2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial y}(x,y) &= -\frac{(1+f_x^2)f_{yy} - f_xf_yf_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -b_1^1.
\end{aligned}
$$

由此可得平均曲率

$$
H = -b_s^s = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} + (1+f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}.
$$

3 建立路径