Chapter 7 Fourier Transforms

Abstracts：复习 Fourier 级数，讲解 Fourier Transforms 的定义、性质和物理意义(例题)；介绍多重 Fourier Transforms.

应 用：求解常微分方程；坐标—动量和时间—能量空间具有丰富的物理；为求解偏微分方程的定解问题做准备。

一、 Fourier Series

1. Fourier 级数的定义

(动机:自然界中存在周期函数,其频谱分析可揭示物理规律。)

定义：设函数 $f(t)$ 的周期为 T，则下述级数称为 $f(t)$ 的 Fourier 级数，

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t\right),$$

其中，
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\cos\dfrac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\sin\dfrac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

引入圆频率 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$（如果 t 是时间空间的变量），上式可改写为

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right)$$

其中，
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

Fourier 级数的收敛性[狄里希莱条件(Dirichlet conditions)]：对于周期为 T 的函数 $f(t)$，若它满足：（1）连续，或在每个周期中只有有限个第一类间断点*；（2）在每个周期中只有有限个极值(即每一个部分的小区间内单调)，则其 Fourier 级数收敛，并且

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right)=\begin{cases}f(t) & (\text{在连续点}t)\\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (\text{在间断点}t).\end{cases}$$

*第一类间断点: 在此点$t=t_0$函数$f(t)$不连续，但左极限$\lim\limits_{t\to t_0-0}f(t)$和右极限$\lim\limits_{t\to t_0+0}f(t)$均存在且有限，所以可积。

Fourier 级数的物理意义:

任何周期信号必可分解为直流成分与基波和各高次谐波的交流成分之和，它们的振幅分别为$\sqrt{a_n^2+b_n^2}$（See Chapter 10.3 **分离变量法&本征值问题**）. 因此，傅里叶级数又成为傅里叶频谱分析(**Spectrum analysis).**

2. Fourier 级数的复数形式(简洁):

利用$\sin n\omega_0 t=\dfrac{e^{in\omega_0 t}-e^{-in\omega_0 t}}{2i}$和$\cos n\omega_0 t=\dfrac{e^{in\omega_0 t}+e^{-in\omega_0 t}}{2}$得

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\omega_0 t}\quad [f(z(t))=\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n, z=e^{-i\omega_0 t}]$$

[discrete frequencies: $\omega_n=n\omega_0,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\text{quantum numbers})$],

其中，$c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(t)e^{in\omega_0 t}\mathrm{d}t$ ，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$c_0=a_0$， $c_n=\dfrac{a_n+ib_n}{2}$， $c_{-n}=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$. 各次谐波的振幅为$2|c_n|$.

3. 有限区间非周期函数的 Fourier 展开(实际体系都有限非周期):

对有限区间的非周期函数，总可以通过延拓来构造周期函数，然后作傅里叶展开（即拷贝不走样）。设函数$f(x)$在坐标空间的区间$x[-l,l]$上满足 Dirichlet 条件，则$f(x)$的 Fourier 级数为，

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),\qquad(-l\le x\le l)$$

其中，

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots),\end{cases}$$

其复数形式为：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}\ \left(-l\le x\le l\right),\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\mathrm{d}x\ \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

注意：这时的 Fourier 级数只在区间 $x[-l,l]$内有意义，例如：

$$\delta(x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{n\pi x}{l}}(-l\le x\le l).$$

这种延拓在相互作用体系中要改变物理性质(PCs are different with DCs.)。

4. 正交完备函数集：

在区间 $x[a,b]$上不恒为零的函数系$\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\cdots\}$，若 $\int_a^b\varphi_m(x)\bar{\varphi}_n(x)\mathrm{d}x=0\ (m\ne n)$；又若对于 $x[a,b]$上的任意平方可积函数 (square integrable function) $f(x)$，完整性方程* 均成立，则称$\{\varphi_n(x)\}$为区间 $x[a,b]$上的正交完备归一集

(A set of orthogonal complete normalized function bases).

*如果对于 $x[a,b]$上的平方可积函数 $f(x)$，总有 $f(x)=\sum_k c_k\varphi_k(x)$，并且

$$\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{s\ne k}c_s\bar{c}_k\int_a^b\varphi_s(x)\bar{\varphi}_k(x)\mathrm{d}x+\sum_k|c_k|^2\int_a^b|\varphi_k(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_k|c_k|^2N_k^2$$

成为完整性方程（称巴塞瓦等式）, $N_k^2=\int_a^b|\varphi_k(x)|^2\,\mathrm{d}x$ 为 $\varphi_k(x)$ 的积分模方。

注: (1)正交性与区间 $x[a,b]$有关。完备性：这些基矢一个不能多、一个不能少。

(2)在复数函数集中，积分应理解为 $\int_a^b\varphi_m(x)\bar{\varphi}_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn}$, where a set of orthogonal complete normalized function bases are $\varphi_k(x)\Rightarrow\varphi_k(x)/N_k$.

(3)同一定义域的 $f(x)$ 可以以 $\varphi_k(x)$ 表示： $f(x)=\sum_k c_k\varphi_k(x)$ ，其值为 c_k (representation theory).

(4)对于 1D 无界空间区域(see below)，连续波矢 k 的本征函数为平面波 $\varphi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ikx}$, its orthogonal complete normalized relation is

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\bar{\varphi}_{k'}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-k')x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\hbar}\delta(k-k')=\delta(p-p').$$

(5) How to find $\varphi_n(x)$ in a generalized approach? See Chapter 10.6, S-L eigenvalue problem (Sturm-Liouville 型方程的本征值问题).

例如 1：$\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}t,\cos\frac{2\pi}{T}t,\sin\frac{4\pi}{T}t,\cos\frac{4\pi}{T}t,\cdots,\sin\frac{2n\pi}{T}t,\cos\frac{2n\pi}{T}t,\cdots\right\}$

在区间 $t\left[-\frac{1}{2}T,\frac{1}{2}T\right]$ 上是正交完备函数集。

正交性：$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}g(t)h(t)\mathrm{d}t=0,\ g(t)$ 和 $h(t)$ 是上面集合中的任意两个不同函数。

平方可积性：$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}T\left[2a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right].$

模方（归一性）：$N_k^2=\begin{cases}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\mathrm{d}t=T, & g(t)=1;\\ \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}|g(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}T, & g(t)\text{是除1之外的其它函数。}\end{cases}$

例如 2：$\left\{e^{i\frac{n\pi}{l}x}\right\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 在区间 $x\left[-l,l\right]$ 上是正交完备集。

例如 3：$\left\{e^{-in\omega_0 t}\right\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 在区间 $t\left[-\pi/\omega_0,\pi/\omega_0\right]$ 上是正交完备集。

5. 多重傅里叶级数：

二元函数 $f(t_1,t_2)$ 在 $-\frac{1}{2}T_1\le t_1\le\frac{1}{2}T_1,-\frac{1}{2}T_2\le t_2\le\frac{1}{2}T_2$ 内的傅里叶级数为

$$f(t_1,t_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{mn}e^{-i\left(m\omega_0't_1+n\omega_0''t_2\right)},$$

其中，$c_{mn}=\dfrac{1}{T_1T_2}\int_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1}\int_{-\frac{1}{2}T_2}^{\frac{1}{2}T_2}f(t_1,t_2)e^{i\left(m\omega_0't_1+n\omega_0''t_2\right)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\quad(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$

$$\omega_0'=\frac{2\pi}{T_1},\quad \omega_0''=\frac{2\pi}{T_2}.$$

二、 Fourier 积分与 Fourier 变换

We consider an interaction-free particle within the quantum mechanics. For the particle is confined in the finite space range of $x[a,b]$, there is the discrete variables $\{n\}$, and the wave function is $\varphi_n(x)$. In that case, we need to adopt the Fourier series. But in the infinite space range of $x[-\infty,+\infty]$, there is the continue variables $k[-\infty,+\infty]$, and the wave function is the plane wave $\varphi_k(x)\sim e^{\pm ikx}$ (see below). We need to learn the Fourier transforms.

对$t(-\infty,\infty)$上的非周期函数$f(t)$，不能展成 Fourier 级数，但是我们可以把它看成是周期为T的函数当$T\to\infty$时的极限。周期为T的函数的 Fourier 级数为： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-i\omega_n t}$,

其中，$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(t)e^{i\omega_n t}\mathrm{d}t$ ，而$\omega_n\equiv n\omega_0=\frac{2n\pi}{T}$， $\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{2\pi}{T}$.

因此，可以把c_n改写为

$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(t)e^{i\omega_n t}\mathrm{d}t=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(\xi)e^{i\omega_n\xi}\mathrm{d}\xi$ ，代入$f(t)$的表达式，得

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(\xi)e^{i\omega_n\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{-i\omega_n t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}f(\xi)e^{-i\omega_n(t-\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

当$T\to\infty$时， $\Delta\omega=\frac{2\pi}{T}\to 0$， $\omega_n=\frac{2\pi}{T}n\to\omega$ (continued spectrum)， $\sum_n(\cdots)\Delta\omega\to\int(\cdots)\mathrm{d}\omega$. 因此，

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega(t-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\omega\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

令 $\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\omega\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$,

则 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$.

1. Fourier 积分定理：

若函数$f(t)$在区间$t(-\infty,\infty)$上满足:（1） $f(t)$在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件；（2） $f(t)$在$t(-\infty,\infty)$上绝对可积[即$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$收敛、有限或者$\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0$]，则$f(t)$可表示成 Fourier 积分，且 Fourier 积分值等

于$\left[f(t-0)+f(t+0)\right]/2$. 即

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega; \\ \tilde{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t. \end{cases}$$

上面一对等式上方的积分称为 Fourier 积分，其中$\tilde{f}(\omega)$由下方等式决定。$\tilde{f}(\omega)$称为$f(t)$的 Fourier 变换，记为：$f(t)\leftrightarrow\tilde{f}(\omega)$，$f(t)$和$\tilde{f}(\omega)$分别称为原函数和象函数。**当$t$是时间变量时，$\omega$则是频率。**

$$f(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega')e^{-i\omega' t}\mathrm{d}\omega']e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega')[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\omega'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega')\delta(\omega-\omega')\mathrm{d}\omega'=\tilde{f}(\omega).$$

当在坐标变量x和动量(波数k)之间变换时，则习惯采用下面的变换：

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k; \\ \tilde{f}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x. \end{cases}\qquad f(x)\leftrightarrow\tilde{f}(k).$$

Remarks 1： $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=0$ 由 **Jordan 引理决定。** 当 $z\to\infty$ $(0\le\arg z\le\pi,$即$\mathrm{Im}z\ge0)$时，$f(z)\Rightarrow0$ (此限制条件为一致地趋于 0), 则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0$ (实常数$m>0$)，其中C_R是以原点为圆心，半径为R的上半圆周，即$z=R\mathrm{e}^{i\theta}(0\le\theta<\pi)$.

Remarks 2： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$有限的要求可以推广，即 $f(t)=e^{i\omega' t}$除外。这是因为对于连续谱的平面波，其“归一化”系数为$\delta(\omega-\omega')$函数：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega-\omega').$$

2. Fourier 变换的基本性质：[$f(x)\leftrightarrow\tilde{f}(k)$为例]

（1） 线性定理：$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\leftrightarrow c_1\tilde{f}_1(k)+c_2\tilde{f}_2(k)$，（$c_1, c_2$是复常数）

（2） 相似定理： $f(ax)\leftrightarrow\dfrac{1}{a}\tilde{f}\left(\dfrac{k}{a}\right)$ $(a\ne0,\ \text{scaling})$

证明： $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\frac{k}{a}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right).$

（3）求导定理：

若 $f^{(m)}(x)\big|_{x\to\pm\infty} = 0,\ (m=0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n\ \tilde{f}(k),\ (n=1,2,3,\cdots).$$

若 $\tilde{f}^{(m)}(k)\big|_{k\to\pm\infty} = 0,\ (m=0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$(-ix)^n\ f(x) \leftrightarrow \tilde{f}^{(n)}(k),\ (n=1,2,3,\cdots).$$

证明：
$$f'(x) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\mathrm{d}f(x)$$
$$= f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + ik\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = (ik)\,\tilde{f}(k).$$

相似地，利用归纳法可以证明更高阶导数定理。

（4）积分定理：

若 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$，则 $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{1}{ik}\tilde{f}(k)$.

若 $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\eta)\mathrm{d}\eta = 0$，则 $\frac{1}{-ix}f(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{k}\tilde{f}(\eta)\mathrm{d}\eta$.

证明：记 $\phi(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$，

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$，所以 $\varphi(x)\big|_{x\to\pm\infty} = 0$，因此由导数定理：

$\varphi'(x) \leftrightarrow ik\tilde{\varphi}(k)$. 又因为

$\phi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad \phi'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x)),$

可得 $\varphi'(x) = f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(k)$.

所以有 $\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{ik}$，即 $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{1}{ik}\tilde{f}(k)$.

（5） 延迟定理： $f(x-\xi) \leftrightarrow e^{-ik\xi}\tilde{f}(k)$.

位移定理： $f(x)e^{-i\lambda\xi} \leftrightarrow \tilde{f}(k+\lambda)$.

证明延迟定理：

$$f(x-\xi) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ik\xi}e^{-iku}\mathrm{d}u = e^{-ik\xi}\tilde{f}(k).$$

证明位移定理：

$$f(x)e^{-i\lambda x} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k+\lambda)x}\mathrm{d}x = \tilde{f}(k+\lambda).$$

（6）　卷积定理(Convolution Theorem，两对 Fourier 换式的卷积)：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k).$$

$$f_1(x) f_2(x) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(\eta)\tilde{f}_2(k-\eta)\mathrm{d}\eta.$$

证明：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)e^{-ikx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi$$
$$\overset{x-\xi=u}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-iku}\mathrm{d}u$$
$$= \tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k).$$

说明：对于变换 $f(t) \leftrightarrow \tilde{f}(\omega)$，将上面性质中凡是出现 $\pm i$ 的地方均变为 $\mp i$.

（正常因果律）

3. 多重 Fourier 变换：二重 Fourier 变换：

$$\begin{cases} f(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1,k_2)e^{i(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2; \\ \tilde{f}(k_1,k_2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{cases}$$

三重 Fourier 变换：

$$\begin{cases} f(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k_1,k_2,k_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3; \\ \tilde{f}(k_1,k_2,k_3)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)e^{-i(k_1x+k_2y+k_3z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{cases}$$

引入 $\vec{r}=x\hat{i}_1+y\hat{i}_2+z\hat{i}_3$ 和 $\vec{k}=k_1\hat{i}_1+k_2\hat{i}_2+k_3\hat{i}_3$，并记体积元 $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

$$\begin{cases} f(\vec{r})=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\iiint\tilde{f}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{k}; \\ \tilde{f}(\vec{k})=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\iiint\tilde{f}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}. \end{cases}$$

四重 FT：
$$f(\vec{r},t)=(2\pi)^{-2}\int\tilde{f}(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\mathrm{d}\vec{k}\mathrm{d}\omega;$$
$$\tilde{f}(\vec{k},\omega)=(2\pi)^{-2}\int f(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\mathrm{d}\vec{r}\mathrm{d}t.$$

4. FT vs. LT 比较

$$\begin{cases} \hat{F}f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\equiv\tilde{f}(\omega); \\ \hat{F}^{-1}\tilde{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega\equiv f(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{L}\varphi(t)=\displaystyle\int_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\equiv\bar{\varphi}(p); \\ \hat{L}^{-1}\varphi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\bar{\varphi}(p)e^{pt}\mathrm{d}p\equiv\varphi(t). \end{cases}$$

条件、结果、意义：例如

$$\begin{cases} \hat{F}\sin\omega_0 t\propto\delta(\omega-\omega_0). \\ \hat{F}hH(T-|t|)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}h\dfrac{\sin\omega T}{\omega}, \\ i.e;\ f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}h\dfrac{\sin\omega T}{\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\omega T}{\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega\ (\text{合成})。 \end{cases}$$

两种不同的积分变换，功用基本相同，不同点：

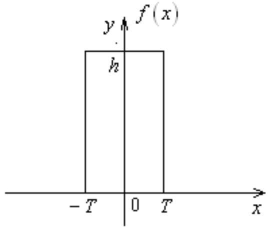
1）对原函数的要求不同。

2）LT 并无直接物理意义，FT 有深刻的物理意义。

3）FT 用于求解不带初始条件 $t(-\infty,+\infty)$ 的稳态过程（振荡）或带自由边界条件 $x(-\infty,+\infty)$ 的空间分布，LT 用于求解带初始条件 $t(0,\infty)$ 的瞬态过程（衰减）或半无界 $x(0,+\infty)$ 的空间分布。

三、例题分析：

例1. 研究矩形脉冲 $f\left(x\right)=\begin{cases}0, x<-T\\ h, -T<x<T\\ 0, x>T\end{cases}$ 的频谱，其中 h 是常数。



[解] $f\left(x\right)$是偶函数，谱函数为

$$\tilde{f}\left(\omega\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t'\right)e^{i\omega t'}\mathrm{d}t'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{+T}he^{i\omega t'}\mathrm{d}t'=\frac{h/i\omega}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t'}\Big|_{-T}^{T}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}h\frac{\sin\omega T}{\omega}.$$

$f(t)$ 的 Fourier 积分是 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega T}{\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$.（频谱分解与叠加）。

可以用来计算积分：$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin Tx}{x}\cos tx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2h}f\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \left(\left|t\right|<T\right)\\ \dfrac{\pi}{4} & \left(\left|t\right|=T\right)\\ 0 & \left(\left|t\right|>T\right).\end{cases}$

例2. 求 $\delta(x)$ 的像函数。

[解] $\delta(x)\leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$\delta(x)$ 的 Fourier 积分是

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\mathrm{d}k.$$

例 2’. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{f}(k)\right|^2\mathrm{d}k$.

证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k)e^{-ikx}\mathrm{d}k][\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}^*(k')e^{ik'x}\mathrm{d}k']\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k)\tilde{f}^*(k')\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(k-k')x}\mathrm{d}x\mathrm{d}k\mathrm{d}k'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k)\tilde{f}^*(k')\delta(k-k')\mathrm{d}k\mathrm{d}k'=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(k)|^2\mathrm{d}k.$$

例 3．求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\ (\alpha>0)$的像函数。

[解]

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}}$$

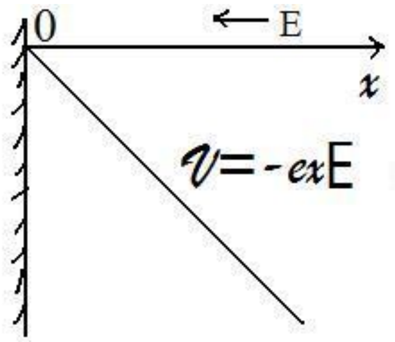
其中用到了积分：$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. $f(x)$的 Fourier 积分是

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}}e^{ikx}\mathrm{d}k\,.$$

$f(x)$是一维空间谐振子势场$V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2$中的基态波函数，$\tilde{f}(k)$为动量空间相应波函数，测不准关系成立(见例 6)。

例4．　量子力学里，对于以能量E从金属表面发射出来并处于恒定加速电场 E 中的电子[设电子质量和电荷各为m和$-e$，E 的方向和x轴的取向如图所示(p. 131 图 7. 3)]，其运动服从如下的 Schrodinger 方程：

$$\begin{cases}-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}-e\mathrm{E}x\psi(x)=E\psi(x) & (x\ge 0)\\ \psi(+\infty)=0,\quad \psi'(+\infty)=0(\text{物理要求}).\end{cases},$$



求电子波函数$\psi(x)$.（虽是定解问题，但给不出 eigenvalues，需要$\psi(0)$！）

[解] 引入$\dfrac{2me\mathrm{E}}{\hbar^2}\equiv\dfrac{1}{l^3}$，　$\dfrac{2mE}{\hbar^2}\equiv\dfrac{\lambda}{l^2}$，　$\xi=\dfrac{x}{l}+\lambda$，

并计此时的$\psi(x)$为$u(\xi)$，则方程变为：

$$\begin{cases}u''(\xi)+\xi u(\xi)=0 & (\xi\ge\lambda),\\ u(+\infty)=0, & u'(+\infty)=0.\end{cases}$$

此外，$\psi(-\infty)=0,\quad \psi'(-\infty)=0$，即$u(-\infty)=0,\quad u'(-\infty)=0$.

我们用 Fourier 变换（与课本上的不同）

$$\begin{cases}\tilde{u}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi\\ u(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(k)e^{ik\xi}\mathrm{d}k\end{cases}$$

解上述方程:由求导定理，$u''(\xi)\leftrightarrow(ik)^2\tilde{u}(k)=-k^2\tilde{u}(k)$,

$$(-i\xi)u(\xi)\leftrightarrow\tilde{u}'(k)\ \text{即}\ \xi u(\xi)\leftrightarrow i\tilde{u}'(k).$$

因此，得到关于$\tilde{u}(k)$的方程，$-k^2\tilde{u}(k)+i\tilde{u}'(k)=0$，即

$\tilde{u}'(k)=-ik^2\tilde{u}(k)$，解之得，$\tilde{u}(k)=c'e^{-ik^3/3}$ (c'是积分常数)。因此，

$$u(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}c'e^{-ik^3/3}e^{ik\xi}\mathrm{d}k=\frac{c'}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\left(k^3/3-k\xi\right)}\mathrm{d}k$$
$$=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\left(k^3/3-k\xi\right)}\mathrm{d}k=c\mathrm{Ai}(-\xi).$$

其中$c=c'\sqrt{2\pi}$是任意常数，而函数

$$\mathrm{Ai}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\left(k^3/3+k\xi\right)}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(k^3/3+k\xi\right)}\mathrm{d}k$$ 称为爱里(Air)函数，

而它所满足的方程 $u''(\xi)-\xi u(\xi)=0$ 称为爱里方程。$\mathrm{Ai}(-\xi)=\mathrm{Ai}(\xi)$.

例5. 求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 Fourier 变换像函数。

[解]: 虽然这个函数满足 Fourier 变换的条件，但是要区分$k<0,k>0$两种情况，并且下半平面的积分回路的实轴部分与所求积分的方向正好相反。

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2\pi i)\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{1+z^2}\right]_{z=-i}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-k} & (k>0)\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi i)\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{1+z^2}\right]_{z=i}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{k} & (k<0)\end{cases}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}.$$

例6. 求 3D 谐振子基态波函数 $f(\vec{r})=\left(\dfrac{a^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{a^2r^2}{2}}$ $(a>0)$的 Fourier 变换像函数（在动量空间的表示），其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

[解] $\tilde{f}(\vec{k})=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\left(\dfrac{a^2}{\pi}\right)^{3/4}\iiint e^{-\frac{a^2r^2}{2}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}$,

注意到被积函数（分离变量）

$$e^{-\frac{a^2r^2}{2}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}=(e^{-a^2x^2/2}e^{-ik_1x})(e^{-a^2y^2/2}e^{-ik_2y})(e^{-a^2z^2/2}e^{-ik_3z}),$$

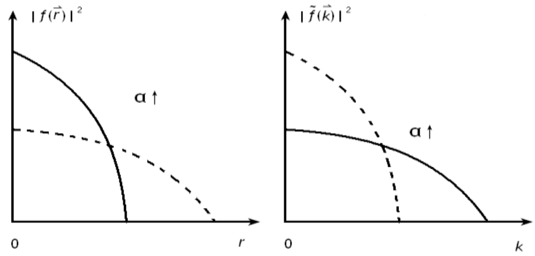
又 $\tilde{f}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}e^{-ikx}\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\cos kx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}}.$

因此，

$$\tilde{f}(\vec{k})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{3/4}\iiint e^{-\frac{\alpha^2r^2}{2}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\left(\frac{1}{\alpha^2\pi}\right)^{3/4}e^{-\frac{k_1^2}{2\alpha^2}}e^{-\frac{k_2^2}{2\alpha^2}}e^{-\frac{k_3^2}{2\alpha^2}}=\left(\frac{1}{\alpha^2\pi}\right)^{3/4}e^{-\frac{\vec{k}^2}{2\alpha^2}}.$$

Here: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}\vec{r}=(\frac{\alpha^2}{\pi})^{3/2}4\pi\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2r^2}r^2\mathrm{d}r\overset{\text{分步}}{\underset{\text{积分}}{=}}(\frac{\alpha^2}{\pi})^{3/2}4\pi\frac{1}{2\alpha^2}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2r^2}\mathrm{d}r=1.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{f}(\vec{k})\right|^2\mathrm{d}\vec{k}=(\frac{1}{\alpha^2\pi})^{3/2}4\pi\int_0^{\infty}e^{-k^2/\alpha^2}k^2\mathrm{d}k=1.$$



归一化之径向波函数。

在 $\vec{r}$ 空间 $\alpha\uparrow,\left|f(\vec{r})\right|^2$ 变窄；

而在 $\vec{k}$ 空间：$\alpha\uparrow,\left|f(\vec{k})\right|^2$ 变宽，

$\Delta r\Delta k\approx\hbar\dfrac{1}{\alpha}\alpha\approx\hbar$，满足测不准关系。

例7． 求 $f(\vec{r})=\dfrac{1}{\sqrt{32\pi a^5}}ze^{-\frac{r}{2a}}$ 的 Fourier 变换像函数，此波函数是氢原子 $2p$ 态波函数之一，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

[解]

$$\tilde{f}(\vec{k})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\iiint\frac{1}{\sqrt{32\pi a^5}}ze^{-\frac{r}{2a}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{16\pi^2\sqrt{a^5}}i\frac{\partial}{\partial k_3}\iiint e^{-\frac{r}{2a}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{aligned}\iiint e^{-\frac{r}{2a}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}&=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r}{2a}}e^{-ikr\cos\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4\pi}{k}\int_0^{\infty}re^{-\frac{r}{2a}}\sin kr\mathrm{d}r=-\frac{4\pi}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r}{2a}}\cos kr\mathrm{d}r\\&=-\frac{4\pi}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{2a}{4a^2k^2+1}\right)=\frac{64\pi a^3}{\left(4a^2k^2+1\right)^2},\end{aligned}$$

其中利用了（see below 例 12）$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. 因此

$$\tilde{f}\left(\vec{k}\right)=\frac{1}{16\pi^2\sqrt{a^5}}i\frac{\partial}{\partial k_3}\frac{64\pi a^3}{\left(4a^2k^2+1\right)^2}=-\frac{64i\sqrt{a^5}k_3}{\pi\left(4a^2k^2+1\right)^3}.$$

例8. 解积分方程$\int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)\,y(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = e^{-x^2}$.

解：将方程先变为卷积形式，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)\,y(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}$$

作 Fourier 变换，有

$$\tilde{y}(k)\tilde{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos kx\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

因此，$\tilde{y}(k) = \pm\frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{8}}$，则

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\pm\frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{8}}e^{ikx}\mathrm{d}k = \pm\frac{\pi^{1/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{k^2}{8}}\cos kx\mathrm{d}k = \pm\sqrt{2}\pi^{-1/4}e^{-2x^2}.$$

例9. 证明 FT：$\frac{1}{r}e^{-\mu r} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+\mu^2}$，$(\mu>0)$[See习题7.2 or 习题7.6(2)].

证明：$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+\mu^2} \leftrightarrow \frac{\sqrt{2/\pi}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}\vec{k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kr}{k^2+\mu^2}\frac{k}{r}\mathrm{d}k = \frac{1}{r}e^{-\mu r}.$$

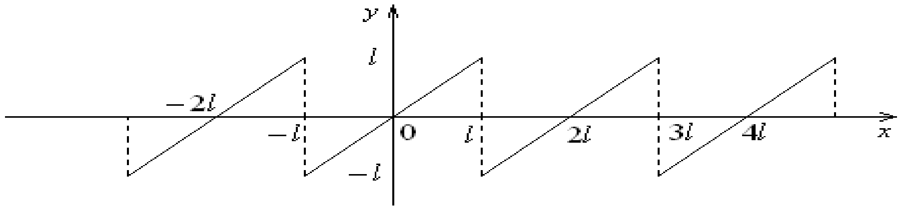
物理意义：Coulomb screening potential: Coulomb potential divergence at $r=0$. 引进 μ 再令 $\mu\to 0$: $\frac{1}{r}\leftrightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}$. 汤川秀树(Yukawa Hideki, 1907～1981), 1935 年结合相对论和量子理论，以质子和中子间新粒子的交换描述原子核的相互作用，推测粒子的质量大约是电子质量的 200 倍(介于电子和核之间)。该粒子在宇宙射线中被发现，它就是汤川秀树的 π 介子，后来才发现它是 μ 介子. 1949 年获得诺贝尔物理学奖,是第一个获得诺奖的日本人，他没有到过欧美留学，而是在日本国土生土长起来的理论物理学家。

例10. 梁教材 P.122 例 3. 试将锯齿波 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数。已知在一个周期 $x\in[-l,l]$ 内，$f(x)=x$.

解：锯齿波是奇函数，$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, 其中

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \xi \sin\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_{\xi=0}^{l}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$
$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l} - \frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]\Bigg|_{\xi=0}^{l} = (-1)^{k+1}\frac{2l}{k\pi}.$$

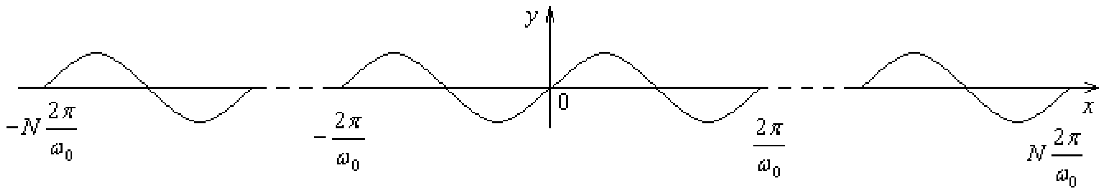
$$\Rightarrow f(x) = \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$



例11. 研究$2n$个正弦波列的频谱： $f(t) = \begin{cases} 0, t < -N\dfrac{2\pi}{\omega_0} \\ A\sin\omega_0 t, -N\dfrac{2\pi}{\omega_0} < t < N\dfrac{2\pi}{\omega_0} \\ 0, t > N\dfrac{2\pi}{\omega_0}. \end{cases}$

解： $f(t)$是奇函数，

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{i\omega t'}\mathrm{d}t' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{N2\pi/\omega_0} A\sin\omega_0 t\sin\omega t\mathrm{d}t$$
$$\underset{合差}{\overset{积化}{=}} -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{N2\pi/\omega_0}\left[\cos(\omega+\omega_0)t - \cos(\omega-\omega_0)t\right]\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}A\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0{}^2}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right).$$



例12. 试求广义 Poisson Eq. $(\nabla^2 - \mu^2)\varphi(\vec{r}) = -4\pi g\rho(\vec{r})$ 满足自然边界条件 $\varphi(\infty) = 0$ 的解（μ, g 为常数）。

解：先求 Green Function $G(\vec{r};\vec{r}')$：$(\nabla^2 - \mu^2)G(\vec{r};\vec{r}) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$.

求导算符的逆运算为积分，或者将结果求导。设积分常数为G_0,

$$\because \delta(\vec{r}-\vec{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\mathrm{d}\vec{k},\ (\vec{R} \equiv \vec{r}-\vec{r}')$$

$$\therefore G(\vec{r};\vec{r}\,') = G_0 - \left(\nabla^2 - \mu^2\right)^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = G_0 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}\vec{k}$$

$$\overset{\vec{k}\cdot\vec{R}=kR\cos\theta}{=} G_0 + \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\sin kR}{k^2+\mu^2}\frac{k}{R}\mathrm{d}k = G_0 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R}\int_{-\infty}^\infty \frac{k\sin kR}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}k$$

$$= G_0 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2+\mu^2}e^{ikR}\mathrm{d}k = G_0 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R}\mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{i\mu}{i2\mu}e^{-\mu R}\right)$$

$$= G_0 + \frac{1}{4\pi R}e^{-\mu R}.$$

注意 $\mathrm{d}\vec{k} = 2\pi k^2 \mathrm{d}k \sin\theta \mathrm{d}\theta = -2\pi(k/R)\mathrm{d}k\mathrm{d}(kR\mathrm{con}\theta)$.

最后由 $r\to\infty, G\to 0$ 得 $G_0 = 0$. 故

$$G(\vec{r};\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},$$

并且无界区域场的叠加为 $\varphi(\vec{r}) = g\int \rho(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\vec{r}\,'$.

对于点源 $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r}) = g\dfrac{e^{-\mu r}}{r}$ 正是 Green function--Coulomb screening potential (see Chapter 14).

Home Work: 7.3, 7.6(2), 7.7.