磁标势的转移矩阵方法和一点推广

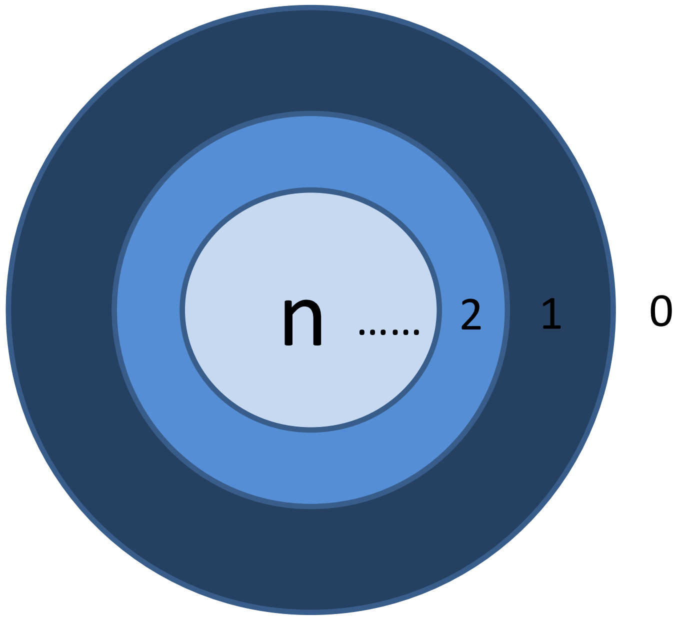
陈苏迪
09300190043

磁标势的转移矩阵方法

H_0

$$\mu(r)=\begin{cases}\mu_0 & r\in(r_1,\ +\infty)\\ \mu_1 & r\in(r_2,\ r_1)\\ & \cdots\\ & \cdots\\ \mu_i & r\in(r_{i+1},\ r_i)\\ & \cdots\\ \mu_n & r\in(0,r_n)\end{cases}$$

在以上体系加上匀强外场H_0



磁标势的转移矩阵方法

$$\varphi(r,\theta)=\begin{cases}\varphi_0(\mathrm{r},\theta) & r\in(r_1,\ +\infty)\\ \varphi_1(\mathrm{r},\theta) & r\in(r_2,\ r_1)\\ \quad\cdots \\ \quad\cdots \\ \varphi_i(\mathrm{r},\theta) & r\in(r_{i+1},\ r_i)\\ \quad\cdots \\ \varphi_n(\mathrm{r},\theta) & r\in(0,r_n)\end{cases}$$

方程 ：$\nabla^2\varphi_i=0$

r_i处的边界条件：

$$\begin{cases}\varphi_{i-1}(r_i)=\varphi_i(r_i)\\ \mu_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_i}=\mu_i\dfrac{\partial\varphi_i(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_i}\end{cases}$$

无穷远处边界条件:

$$\varphi_0(r)\approx -H_0 r\cos\theta$$

原点处边界条件：

$\varphi_n(0)$有限

磁标势的转移矩阵方法

由于外场均匀，因此取试解

$$\varphi_i(r,\theta) = (A_i r + B_i/r^2)\cos\theta$$

代入 边界条件，得到

$$A_0 = -H_0$$

$$B_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} r_i & \dfrac{1}{{r_i}^2} \\ \mu_{i-1} & \dfrac{-2\mu_{i-1}}{{r_i}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i & \dfrac{1}{{r_i}^2} \\ \mu_i & \dfrac{-2\mu_i}{{r_i}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix} = \mathrm{T}_{i-1,i} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

磁标势的转移矩阵方法

$$\mathrm{T}_{\mathrm{i,i-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_{i-1}}{3\mu_i} + \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3{R_i}^3} - \dfrac{2\mu_{i-1}}{3{R_i}^3\mu_i} \\ \dfrac{{R_i}^3}{3} - \dfrac{{R_i}^3\mu_{i-1}}{3\mu_i} & \dfrac{2\mu_{i-1}}{3\mu_i} + \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathrm{T}_{0,1}\mathrm{T}_{1,2} \dots \mathrm{T}_{\mathrm{n-1,n}} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$A_0 = -H_0 \qquad A_n = \frac{-H_0}{T_{11}}$$

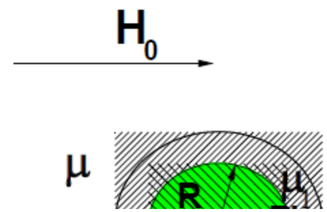
$$B_0 = \frac{-T_{21}H_0}{T_{11}} \qquad B_n = 0$$

磁标势的转移矩阵方法

整理下面的问题写成 Note（供学有余力的同学选作）：

（1） 根据上课的提示，建立多重球壳结构的磁标势解法的转移矩阵方法；

（2） 求解下图所示的问题-半径为 R 的磁介质球（磁导率为 μ_2）外面包一层另外的磁介质（磁导率为 μ_1），总的双层球的半径为 R'，将这样一个体系放置于第三种磁介质（磁导率为 μ）中，施加均匀磁场，问体系的有效偶极子大小等于多少？调整 μ 的大小，问什么条件下体系的有效偶极矩消失？



$$m = -4\pi \mathrm{H}_0 \frac{\mathrm{R}'^3(\mu-\mu_1)(\mu_2+2\mu_1)+\mathrm{R}^3(2\mu_1+\mu)(\mu_1-\mu_2)}{(\mu_1+2\mu)(\mu_2+2\mu_1)+2\frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'^3}(\mu-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)}$$

其余各量均为常数，要使等效偶极矩消失，须有

$$\mu = \mu_1 - \frac{3\mathrm{R}^3\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{\mathrm{R}'^3(\mu_2+2\mu_1)+\mathrm{R}^3(\mu_1-\mu_2)}$$

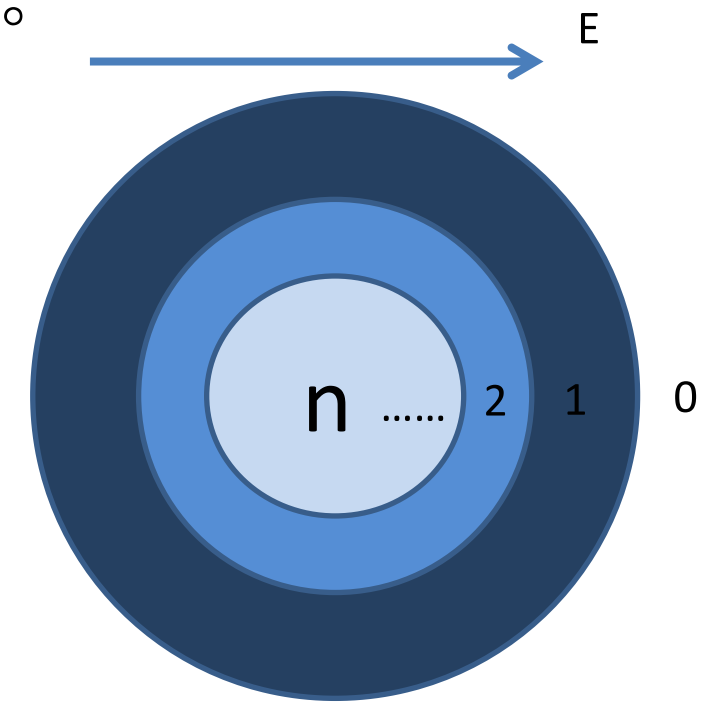
转移矩阵的推广

- 静磁
- 静电
- 旋转对称的球坐标
- 二维（z方向平移不变）的柱坐标
- 一维量子力学

二维柱坐标

计算一个静电场问题。考虑z方向上的无限长介质柱置于匀强电场E中。

$$\epsilon(\rho) = \begin{cases} \epsilon_0 & \rho \in (\rho_1,\ +\infty) \\ \epsilon_1 & \rho \in (\rho_2,\ \rho_1) \\ & \cdots \\ & \cdots \\ \epsilon_i & \rho \in (\rho_{i+1},\ \rho_i) \\ & \cdots \\ \epsilon_n & x \in (0, \rho_n) \end{cases}$$



二维柱坐标

电势

$$\varphi(\rho,\theta)=\begin{cases}\varphi_0(\rho,\theta) & \rho\in(\rho_1,\ +\infty)\\ \varphi_1(\rho,\theta) & \rho\in(\rho_2,\ \rho_1)\\ & \cdots\\ & \cdots\\ \varphi_i(\rho,\theta) & \rho\in(\rho_{i+1},\ \rho_i)\\ & \cdots\\ \varphi_n(\rho,\theta) & x\in(0,\rho_n)\end{cases}$$

$$\varphi_i(\rho,\theta)=(A_i\rho+B_i/\rho)\cos\theta$$

$\rho\ \to+\infty$时$\varphi_0(\rho)\approx-\mathrm{E}_0\rho\cos\theta$

$\rho=0$时$\varphi_n(\rho)$有限

ρ_i处的边界条件为

$$\begin{cases}\varphi_{i-1}(\rho_i)=\varphi_i(\rho_i)\\ \epsilon_{i-1}\ \frac{\partial\varphi_{i-1}(\rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_i}=\epsilon_i\frac{\partial\varphi_i(\rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_i}\end{cases}$$

二维柱坐标

代入边界条件得到：

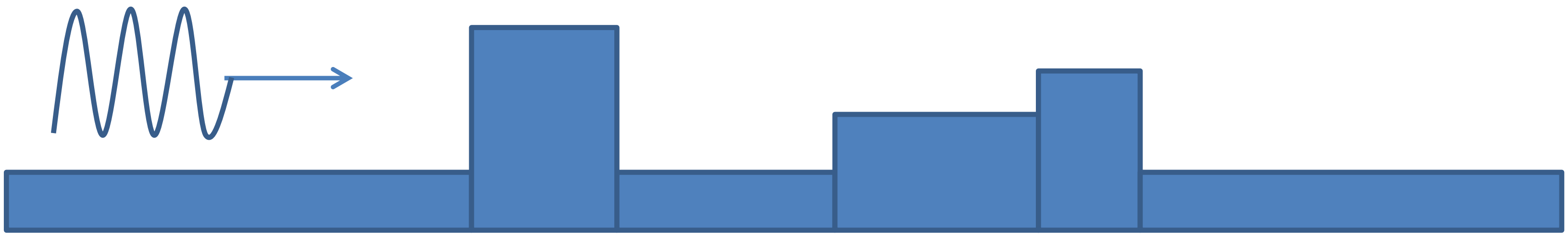
$$B_n = 0, A_0 = -\mathrm{E}_0$$

$$\begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix} = \mathrm{T}_{i-1,i} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T}_{i\text{-}1,i} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_i}{2\epsilon_{i-1}} + \frac{1}{2} & \frac{\epsilon_{i-1}-\epsilon_i}{2{\rho_i}^2\epsilon_{i-1}} \\ \frac{(\epsilon_{i-1}-\epsilon_i){\rho_i}^2}{2\epsilon_{i-1}} & \frac{\epsilon_i}{2\epsilon_{i-1}} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

故 $$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathrm{T}_{0,1}\mathrm{T}_{1,2} \ldots \mathrm{T}_{\mathrm{n}-1,\mathrm{n}} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$ 令$\mathrm{T}_{0,1}\mathrm{T}_{1,2} \ldots \mathrm{T}_{\mathrm{n}-1,\mathrm{n}} = \mathrm{T}$

可以解得 $A_n = -\frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{T}_{11}}$ $\qquad B_0 = -\frac{\mathrm{E}_0\mathrm{T}_{21}}{\mathrm{T}_{11}}$

一维阶梯状势场对粒子的散射



考虑势场

$$V(x)=\begin{cases} V_0 & x\in(-\infty,x_1) \\ V_1 & x\in(x_1,x_2) \\ & \dots \\ & \dots \\ V_i & x\in(x_i,x_{i+1}) \\ & \dots \\ V_n & x\in(x_n,+\infty) \end{cases}$$

定态波函数可取为

$$\psi=\begin{cases} \psi_0(x) & x\in(-\infty,x_1) \\ \psi_1(x) & x\in(x_1,x_2) \\ & \dots \\ & \dots \\ \psi_i(x) & x\in(x_i,x_{i+1}) \\ & \dots \\ \psi_n(x) & x\in(x_n,+\infty) \end{cases}$$

一维阶梯状势场对粒子的散射

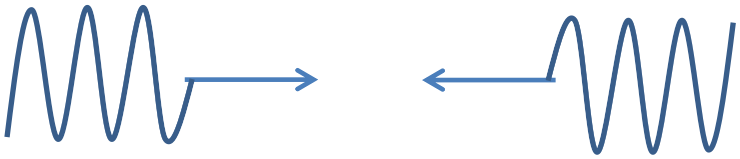
ψ_i满足薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + \mathrm{V}_i\psi_i = \mathrm{E}\psi_i$$

在x_i处的边界条件为

$$\begin{cases} \psi_{i-1}(x_i) = \psi_i(x_i) \\ \frac{\partial \psi_{i-1}(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_i} = \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_i} \end{cases}$$

取试解



$$\psi_i = A_i e^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E}-\mathrm{V}_i)}\,x} + B_i e^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E}-\mathrm{V}_i)}\,x}$$

一维阶梯状势场对粒子的散射

令$k_i = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - \mathrm{V}_i)}$　　　试解代入边条可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_{i-1} & -k_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_{i-1}} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{i-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_i & -k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_i} & 0 \\ 0 & e^{-ik_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_i} & 0 \\ 0 & e^{+ik_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{k_{i-1}}{2k_i} & \frac{1}{2} - \frac{k_{i-1}}{2k_i} \\ \frac{1}{2} - \frac{k_{i-1}}{2k_i} & \frac{1}{2} + \frac{k_{i-1}}{2k_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_{i-1}} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{i-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix}$$

一维阶梯状势场对粒子的散射

令

$$T_{i,i-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{k_{i-1}}{2k_i} & \frac{1}{2}-\frac{k_{i-1}}{2k_i} \\ \frac{1}{2}-\frac{k_{i-1}}{2k_i} & \frac{1}{2}+\frac{k_{i-1}}{2k_i} \end{pmatrix} \qquad \varphi_i = \begin{pmatrix} e^{ik_i} & 0 \\ 0 & e^{-ik_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = {\varphi_i}^* T_{i,i-1} \varphi_{i-1} \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{pmatrix}$$
$$= {\varphi_i}^* T_{i,i-1} \varphi_{i-1} {\varphi_{i-1}}^* T_{i-1,i-2} \varphi_{i-2} \begin{pmatrix} A_{i-2} \\ B_{i-2} \end{pmatrix}$$
$$= {\varphi_i}^* T_{i,i-1} T_{i-1,i-2} \ldots T_{i,i-1} \varphi_0 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

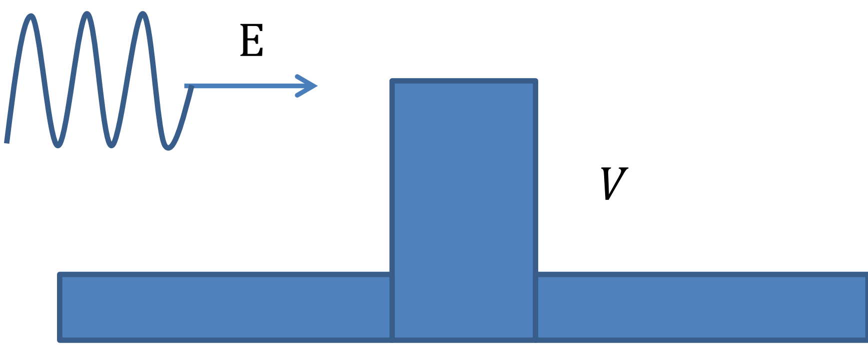
$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = {\varphi_n}^* \mathrm{T}\, \varphi_0 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

其中T=$T_{n,n-1} T_{n-1,n-2} \ldots T_{1,0}$

单重方势垒

某粒子能量为E，从无穷远处飞向一方势垒，求其反射、透射概率。

$$\mathrm{V}(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ V & x \in (0, \mathrm{a}) \\ 0 & x \in (a, +\infty) \end{cases}$$



此时

$$k_0 = k_2 = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - \mathrm{V})}$$

$A_0 e^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x}$代表了从$-\infty$射向势垒的粒子，因此令$A_0 = 1$

$B_2 e^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x}$代表了从$+\infty$射向势垒的粒子，因此令$B_2 = 0$

单重方势垒

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_2{}^* \, \mathrm{T} \, \varphi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

可以解出，当E>V时，

$$|A_2|^2 = \frac{4k_0{}^2 k_1{}^2}{\left(k_0{}^2 - k_1{}^2\right)^2 \sin^2(ak_1) + 4k_0{}^2 k_1{}^2}$$

$$|B_0|^2 = \frac{\left(k_0{}^2 - k_1{}^2\right)^2 \sin^2(ak_1)}{\left(k_0{}^2 - k_1{}^2\right)^2 \sin^2(ak_1) + 4k_0{}^2 k_1{}^2}$$

以上两式表明，粒子通过势垒的概率是$|A_2|^2$，被势垒反射的概率是$|B_0|^2$

当E<V时，令$k_1' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{V} - \mathrm{E})}$,可以解出：

$$|A_2|^2 = \frac{4k_0{}^2 k_1{}'^2}{\left(k_0{}^2 + k_1{}'^2\right)^2 \sinh^2(ak_1) + 4k_0{}^2 k_1{}'^2}$$

$$|B_0|^2 = \frac{\left(k_0{}^2 + k_1{}'^2\right)^2 \sinh^2(ak_1)}{\left(k_0{}^2 + k_1{}'^2\right)^2 \sinh^2(ak_1) + 4k_0{}^2 k_1{}'^2}$$

谢谢！